به نام خدا

راهنما و تشریح مسائل

نظریه مجموعه ها و کاربردهای آن

مؤلفان:

دکتر علیرضا احمدی - محمدرضا زمانی

دانشکده ریاضی - دانشگاه سیستان و بلوچستان

تقدیم به پدرم، مادرم و پریزاد

که منحصر به فرد بودنشان،

نیاز به اثبات ندارد.

(زمانی)

مقدمه:

شکر و سپاس ایزد منان را که آدمی را به بهترین شکل آفرید و هدایت را نصیب او نمود. در گذشته ی نه چندان دور، جبر گزاره ها و منطق، در ریاضیات دبیرستانی جایگاه نسبتاً مناسبی داشت. لذا دانش آموز با این مباحث آشنایی داشت و در دانشگاه با مشکل چندانی مواجه نبود. اما در چند نظام آموزشی اخیر، کتب دبیرستانی به بررسی اجمالی این بحث بسنده نموده اند. از اینرو، دانشجوی ریاضی همه ی آن مباحث را باید در درس مبانی ریاضیات که در یک نیمسال تحصیلی ارائه می شود فرا گیرد. در مدتی که با دانشجویان این درس همراه بوده ایم، از دشوار بودن فهم مباحث آن گلایه داشته اند. کمتر کسی در غنی بودن کتاب نظریه ی مجموعه ها و کاربردهای آن (نوشته ی لین و لین) شک دارد. تنوع و گستردگی مثالها و تمرینات به حدی است که دانشجو می تواند با مطالعه و تمرین آنها، به آمادگی مطلوب در این درس دست یابد. در کنار اساتید بزرگوار که مسئولیت خطیر آموزش را بر عهده دارند، استفاده ی صحیح از کتابهای راهنما می تواند مثمر ثمر باشد.

مایلیم از استاد گرانقدر، پرویز حسن پور، عضو بازنشسته ی هیئت علمی دانشگاه بیرجند که همیشه مایه ی امید دانشجویان بوده اند، تشکر و قدردانی نماییم. راهنمایی های ایشان، ارزشمند و راه گشا بودند. همچنین از جناب آقای علی خلخالی، که در آماده سازی کتاب و طراحی جلد، ما را یاری نموده اند کمال تشکر را داریم. از خانم ها، یزدی و درخشان که حروف چینی کتاب را بر عهده داشته اند، صمیمانه سپاسگزاریم.

ادعایی در بی عیب و نقص بودن کتاب نداشته و از اساتید و دانشجویان گرامی، استدعا داریم هرگونه اشکال احتمالی را به اطلاع برسانند.

با تقدیم احترام

دکتر علیرضا احمدی- محمد رضا زمانی

سیستان و بلوچستان- زاهدان

mrzamani1366@yahoo.com

سخنی با دانشجو:

درس مبانی ریاضیات یکی از مهمترین دروس دوره ی کارشناسی می باشد که متاسفانه برخی دانشجویان آن را کم ارزش تلقی می کنند. یقینا ممارست و ورزیدگی در این درس، دانشجو را در ادامه ی مسیر موفق تر خواهد نمود. به دانشجویان اکیداً توصیه می کنیم، قبل از تفکر و بحث تمرینات، به سراغ حل آنها نروند. این کار نه تنها مفید نیست، بلکه جنبه های آموزشی کتاب را زیر سؤال خواهد برد.

سعی نموده ایم به اکثر سوالات پاسخ دهیم اما بعضی از آنها را به عهده ی دانشجو گذاشته ایم. اگر سوالی پاسخ داده نشده، به این دلیل نبوده است که آن سوال اهمیت ندارد. سوالاتی را که در آخر کتاب پاسخ داده شده اند در این مجموعه نیاورده ایم. همچنین از بین سوالاتی که روش برهان مشابهی داشته اند به بررسی چند نمونه اکتفا نموده ایم.

سوالی که ذهن اکثر دانشجویان را به خود مشغول نموده است، نحوه ی پاسخگویی به سوالات در امتحانات است. این مسئله تا حدودی به سلیقه ی اساتید برمی گردد. بعضی اساتید، ذکر جزئیات بیشتری را مطلوب می دانند اما برخی معتقدند نباید برهان آنقدر طولانی شود که مسئله ی اصلی در آن محو شود.

اکثر برهان هایی که در کتابهای حل تمرین ارائه می شوند قابل قبول برای امتحانات نیستند چرا که به تنهایی مستقل نمی باشند. دانشجویان باید توجه داشته باشند که این کتابها فقط روش رسیدن به حکم را نشان می دهند اما اثباتی که به تنهایی مورد قبول واقع شود باید چارچوب خاصی داشته باشد. به نظر نمی رسد اثباتی که سراسر آن تشکیل شده از ارجاع به قضیه ها و تمرینهای مختلف، به عنوان پاسخ سوال امتحانی مورد قبول واقع شود!

پیروز و سربلند باشید

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول

منطق مقدماتی

تمرین ۱. ۱- صفحه ی ۷.

در مسائل ۱ تا ۱۰ یک جمله ی فارسی داده شده است. در هر کدام تعیین کنید که جمله، گزاره است یا نیست.

۱. در ۷ ژانویه ۱۴۴۲، در قسمتی از فلوریدا برف بارید.

جواب: گزاره است.

۲. ارسطو پاهای پهنی داشت.

جواب: گزاره است.

۳. جامعه گرایی خطاست.

جواب: گزاره نیست. (در علوم انسانی به طور قطع و یقین نمی توان گفت یک جمله راست است یا دروغ)

۴. ثروتمند ترین مرد دنیا آقای هانت در تگزاس است.

جواب: گزاره است.

۵. علی و جمشید بچه های خوبی هستند.

جواب: گزاره نیست. (علی و جمشید شناخته شده نیستند. همچنین صفت خوب بودن بستگی به سلیقه اشخاص دارد و نمی توان در مورد راست بودن یا دروغ بودن آن مطمئن بود.)

۶. این ماشین چقدر می ارزد؟

جواب: گزاره نیست. (جمله، سؤالی است.)

۷. روی چمن راه نروید.

جواب: گزاره نیست. (جمله، امری است)

۸. همیشه کمربند صندلی تان را محکم ببندید.

جواب: گزاره نیست. (جمله، امری است)

در مسائل ۱۲ تا ۱۹ ارزش راستی هر یک از گزاره ها را تعیین کنید. برای آنهایی که دو حالت دارند از جدول ۱ و برای آنهایی که چهار حالت دارند از جدول ۲ استفاده کنید.

۱۲. $\sim(\sim p)$

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

۱۸. $(p \wedge q) \wedge \sim p$

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
T	T	F	T	F
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

در مسائل ۲۲ تا ۲۵، جدول ارزش هر یک از گزاره ها را تشکیل دهید. از الگوی تمرین ۲۱ برای تشخیص حالت های مختلف استفاده کنید.

۲۴. $(p \wedge \sim q) \wedge r$

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \wedge r$
T	T	T	F	F	F
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	F

تمرین ۱. ۲- صفحه ی ۱۱.

در مسائل ۱ تا ۱۲ ، جدول ارزش گزاره های داده را تشکیل دهید.

۱. $p \vee \sim p$

جواب:

p	$\sim q$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

۵. $(\sim q) \to (\sim p)$

جواب:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim q) \to (\sim p)$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

۶. $q \leftrightarrow p$

جواب:

p	q	$q \to p$	$p \to q$	$q \leftrightarrow p (\equiv (q \to p) \wedge (p \to q))$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T

۱۳. آیا گزاره ی $(\sim p) \to (\sim q)$ (مسئله ی ۵) هم ارز منطقی گزاره ی $p \to q$ است؟

جواب: بلی. مقایسه ی جداول ارزش این دو گزاره نشان می دهد که در هر حالت منطقی، ارزش های مشابه دارند. به عنوان مثال، زمانی که p، ارزش T و q، ارزش F دارد، هر دو گزاره ی $p \to q$ و $\sim q \to \sim p$ دارای ارزش F می باشند.

۱۵. از گزاره های مسائل ۱ تا ۱۲ ، تعیین کنید کدام گزاره ها هم ارز منطقی هستند.

جواب:

$\sim p \vee q \equiv \sim q \to \sim p$ (مسائل ۴ و ۵).

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (مسائل ۷و ۸).

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (مسائل ۹و۱۰).

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (مسائل ۱۱ و ۱۲)

۱۶. در هر یک از حالت های زیر ، گزاره های مرکب داده شده را با استفاده از نماد های پیشنهادی، به صورت نمادی برگردانید.

الف) چنین نیست که من با شما مهربان نیستم. (M)

جواب: اگر گزاره ی «من با شما مهربان هستم» را با M نشان دهیم، آنگاه $\sim M$، بیانگر گزاره ی « من با شما مهربان نیستم» خواهد بود. در نتیجه گزاره ی «چنین نیست که من با شما مهربان نیستم» به صورت $\sim(\sim M)$ می باشد.

ب) اگر او فرشته است، آنگاه او دو بال دارد.(F, B)

جواب: گزاره ی « او فرشته است» را با F و گزاره ی «او دو بال دارد» را با B نشان می دهیم. گزاره ی «اگر او فرشته است آنگاه او دو بال دارد» به صورت $F \to B$ می باشد.

ج) قیمت گوشت افزایش می یابد اگر و تنها اگر عرضه از تقاضای گوشت کمتر باشد . (G, A)

جواب: گزاره ی «قیمت گوشت افزایش می یابد» را با G و گزاره ی «عرضه از تقاضای گوشت کمتر باشد» را با A نشان می دهیم. بنابراین گزاره ی « قیمت گوشت افزایش می یابد اگر و تنها اگر عرضه از تقاضای گوشت کمتر باشد» به صورت $G \leftrightarrow A$ خواهد بود.

هـ) اگر صادرات گوشت افزایش یابد یا پرورش دام زیاد نشود ، آنگاه قیمت ها افزایش می یابد.(S, P, G)

جواب: گزاره ی «صادرات گوشت افزایش یابد» را با S، گزاره ی «پرورش دام زیاد نشود» را با P و گزاره ی «قیمت ها افزایش می یابد» را با G نشان می دهیم. درنتیجه، گزاره ی « اگر صادرات گوشت افزایش یابد یا پرورش دام زیاد نشود ، آنگاه قیمت ها افزایش می یابد» به صورت $S \vee \sim P \rightarrow G$ خواهد بود.

۱۷. گاهی اوقات $p \rightarrow q$ را «p فقط اگر q » می خوانند. هریک از گزاره های زیرین را ، با استفاده از نماد های پیشنهادی به صورت نمادی برگردانید.

ب) تابع مشتق دارد فقط اگر پیوسته باشد. (M, P)

جواب: گزاره ی «تابع مشتق دارد» را با M و گزاره ی «تابع پیوسته باشد» را با P نشان می دهیم. لذا گزاره ی « تابع مشتق دارد فقط اگر پیوسته باشد» به صورت $M \rightarrow P$ خواهد بود.

ج) ماتریس وارون دارد فقط اگر دترمینانش صفر نباشد. (V, D)

جواب:گزاره ی «ماتریس وارون دارد» را با V و گزاره ی «دترمینان ماتریس صفر نباشد» را با D نشان می دهیم. در این صورت گزاره ی « ماتریس وارون داردفقط اگر دترمینانش صفر نباشد» به صورت $V \rightarrow D$ می باشد.

۱۸. در گزاره ی $p \rightarrow q$ ، p را شرط کافی برای q و q را شرط لازم برای p می گویند. گزاره های «الف» تا «د» مسئله ی ۱۷ را نخست با بیان ((شرط کافی)) و سپس با بیان ((شرط لازم)) بنویسید.

ب) شرط کافی: مشتق پذیری تابع ، شرط کافی برای پیوستگی آن است. (به عبارت معادل برای آنکه تابعی پیوسته باشد ، کافی است مشتق پذیر باشد.)

شرط لازم: پیوستگی تابع، شرط لازم برای مشتق پذیری آن است.

ج) شرط کافی: وارون پذیری ماتریس، شرط کافی برای آن است که ماتریس، دترمینال ناصفر داشته باشد. (به عبارت معادل: شرط کافی برای آنکه ماتریس ، دترمینان ناصفر داشته باشدآن است که ماتریس، وارون داشته باشد.)

توجه: توضیح مختصری در رابطه با شرط لازم و کافی درک بهتری به خواننده خواهد داد. در قسمت (ب) این تمرین بیان شد که مشتق پذیری ، شرط کافی برای پیوستگی است. یعنی اگر تابعی در یک نقطه، مشتق پذیر باشد، آنگاه حتماًدر آن نقطه پیوسته است. اما پیوستگی، شرط لازم برای مشتق پذیری است . این عبارت به این معنی نیست که اگر تابعی در یک نقطه پیوسته باشد، باید در آن نقطه مشتق پذیر نیز باشد، بلکه بدین معنی که اگر تابعی در یک نقطه، پیوسته نباشد، آنگاه مشتق پذیر نیست. تابع $f(x) = |x|$ را در نظر بگیرید. این تابع در تمام نقاط پیوسته است. اما درنقطه $x = ۰$ مشتق پذیر نیست (زیرا مشتق راست برابر $+۱$ و مشتق چپ برابر -۱ است).

۱۹. آیا $\sim(p \leftrightarrow q)$ هم ارز منطقی $p \leftrightarrow \sim q$ است؟ نتیجه گیری خود را با تشکیل جدول ارزش بیازمایید.

جواب: بلی. جدول ارزش زیر را درنظر بگیرید:

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$p \leftrightarrow \sim q$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F
۱	۲	۳	۴	۵	۶

با مقایسه ی ستونهای ۵ و۶ جدول فوق، درمی یابیم که که گزاره های $\sim(p \leftrightarrow q)$ و $(p \leftrightarrow \sim q)$ هم ارز منطقی اند.

۲۰. آیا $p \leftrightarrow \sim q$ هم ارز منطقی $\sim p \leftrightarrow q$ است؟

بلی. با تشکیل جدول ارزش این دو گزاره و مقایسه ی آنها می توان صحت آن را بررسی نمود.

۲۱. اگر یک گزاره ی مرکب متشکل از گزاره های ساده ی p و q، جدول ارزش زیر را داشته باشد:

p	q	?
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

آیا می توانید گزاره ی مرکب را بیابید؟

جواب: جدول ارزش گزاره ی $p \vee q$ (جدول ۴، صفحه ی ۹) را با جدول ارزش گزاره ی این تمرین مقایسه کنید. ملاحظه می شود در حالتی که گزاره ی $p \vee q$ درست است، گزاره ی مورد نظر، نادرست است و بالعکس. لذا گزاره ی مورد نظر $\sim(p \vee q)$ می باشد.

تمرین ۱. ۳- صفحه ی ۱۸.

۱. قسمت های (الف) و (ب) قضیه ی ۱ را ثابت کنید.

الف) قانون جمع: $p \Rightarrow p \vee q$

p	$\rightarrow$	$(p$	$\vee$	$q)$
T	T	T	T	T
T	T	T	T	F
F	T	F	T	T
F	T	F	F	F
۱	۳	۱	۲	۱

توضیح: همانطور که ملاحظه می شود، ترتیب ارزش گذاری هر ستون را در زیر آن آورده ایم. ستون هایی که شماره ی یکسانی دارند از نظر ترتیب ارزش گذاری در یک سطح اند. مثلاً در جدول فوق، ۳ تا از ستون های جدول، دارای شماره ۱ می باشند. این بدین معنی است که فرقی نمی کند کدام یک از این ستون ها را ابتدا ارزش گذاری کنید. در مرحله ی اول، ستون های با شماره ی ۱، ارزش گذاری می شوند. سپس ستون‌های با شماره ی ۲ را ارزش گذاری می کنیم و الی آخر... .

۳. ثابت کنید که $\sim(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \equiv \sim\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q}$

$\sim$	$(\boldsymbol{p}$	$\vee$	$\boldsymbol{q})$	$\to$	$(\sim\boldsymbol{p}$	$\wedge$	$\sim\boldsymbol{q})$
F	T	T	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	T	T
۴	۱	۳	۱	۵	۲	۳	۲

۶. ثابت کنید که $(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}) \implies (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r} \to \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$

$(\boldsymbol{p}$	$\to$	$\boldsymbol{q})$	$\to$	$(\boldsymbol{p}$	$\wedge$	$\boldsymbol{r}$	$\to$	$\boldsymbol{q}$	$\wedge$	$\boldsymbol{r})$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	T	F	F	F
۱	۲	۱	۴	۱	۲	۱	۳	۱	۲	۱

۸. با استفاده از قانون دمورگن، نقیض گزاره ی « این تابع مشتق دارد یا من احمق هستم» را به زبان عادی بنویسید.

جواب: طبق قانون دمورگن «$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$» داریم:

$\sim$(این تابع مشتق دارد یا من احمق هستم) $\equiv \sim$(این تابع مشتق دارد) و $\sim$(من احمق هستم)

$\equiv$ (این تابع مشتق ندارد) و (من احمق نیستم)

۹. قوانین دمورگن را برای سه مؤلفه ثابت کنید.

الف) $\sim(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \equiv \sim\boldsymbol{p} \vee \sim\boldsymbol{q} \vee \sim\boldsymbol{r}$

ب) $\sim(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \equiv \sim\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q} \wedge \sim\boldsymbol{r}$

جواب: الف) روش اول:

$$\sim(p \wedge q \wedge r) \overset{\text{شرکت پذیری}}{\Longleftrightarrow} \sim\big((p \wedge q) \wedge r\big) \overset{\text{دمورگن}}{\Longleftrightarrow} \sim(p \wedge q) \vee \sim r$$

$$\overset{\text{دمورگن}}{\Longleftrightarrow} (\sim p \vee \sim q) \vee \sim r \overset{\text{شرکت پذیری}}{\Longleftrightarrow} \sim p \vee \sim q \vee \sim r$$

روش دوم. با استفاده از جدول ارزش:

$\sim$	$((\boldsymbol{p}$	$\wedge$	$\boldsymbol{q})$	$\wedge$	$\boldsymbol{r})$	$\leftrightarrow$	$((\sim\boldsymbol{p}$	$\vee$	$\sim\boldsymbol{q})$	$\vee$	$\sim\boldsymbol{r})$
F	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F
T	T	T	T	F	F	T	F	F	F	T	T
T	T	F	F	F	T	T	F	T	T	T	F
T	T	F	F	F	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	F	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
۴	۱	۲	۱	۳	۱	۵	۲	۳	۲	۴	۲

۱۴. آیا $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{s})$ هم ارز منطقی $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{s}) \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{s})$ است؟

جواب: بلی. روش اول:

$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv ((p \vee q) \wedge r) \vee ((p \vee q) \wedge s)$ پخش پذیری

$\equiv (r \wedge (p \vee q)) \vee (s \wedge (p \vee q))$ جابجایی

$\equiv ((r \wedge p) \vee (r \wedge q)) \vee ((s \wedge p) \vee (s \wedge q))$ پخش پذیری

$\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ جابجایی – شرکت پذیری

روش دوم: با استفاده از جدول ارزش، می توان تحقیق کرد که این دو گزاره، هم ارز منطقی اند.

در هر کدام از مسائل ۱۸ الی ۲۰، ستون آخر جدول ارزش یک گزاره ی مجهول، شامل گزاره های ساده ی p، q و r داده شده است. این گزاره ی مرکب را پیدا کنید.

۱۸. $TFFFFFFF$

جواب: این گزاره فقط در حالتی که هر سه مؤلفه ی آن راست باشند، راست است و در صورتی که حداقل یکی از مؤلفه ها دروغ باشد، دروغ است. در نتیجه، گزاره ی مورد نظر باید ترکیب عطفی p، q و r یعنی $p \wedge q \wedge r$ باشد.

۱۹. $FFFFFFFT$

جواب: این گزاره فقط در صورتی که هر سه مؤلفه ی آن دروغ باشند ، راست است و اگر حداقل یک مؤلفه راست باشد ، این گزاره دروغ است که دقیقا نقیض گزاره ی $p \vee q \vee r$ می باشد. لذا گزاره ی مورد نظر ما $\sim(p \vee q \vee r)$ خواهد بود.

تمرین ۱. ۴- صفحه ی ۲۰.

۳. برهان خلف زیر را ثابت کنید:

$$(\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{c}) \leftrightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$$

جواب:

$(\boldsymbol{p}$	$\wedge$	$\sim\boldsymbol{q}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{c})$	$\leftrightarrow$	$(\boldsymbol{p}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{q})$
T	F	F	T	F	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F	T	F
۱	۳	۲	۳	۱	۵	۱	۲	۱

۵. ثابت کنید که برای هر گزاره یr، $(p \to q) \Rightarrow (p \vee r \to q \vee r)$

جواب:

$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(p$	$\vee$	r	$\to$	q	$\vee$	$r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	F
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	T	F	F	F
۱	۲	۱	۴	۱	۲	۱	۳	۱	۲	۱

۶. جواد ادعا می کرد که هر کاری را می تواند انجام دهد.آیا جواد می توانست شیئی بسازد که نتواند آن را بلند کند؟

جواب:

فرض کنیم جواد شیئی بسازد که نتواند آن را بلند کند. فرض اولیه این بود که جواد می تواند هر کاری را انجام دهد لذا باید هر شیئی را بلند کند. این یک تناقض است زیرا جواد، شیئی را هم نمی تواند بلند کند و هم می تواند.

فرض کنیم جواد نتواند شیئی بسازد که نتواند آن را بلند کند. از طرفی فرض ما این بوده که جواد میتواند هر کاری انجام دهد. این تناقض است.

تمرین ۱. ۵- صفحه ی ۲۲.

راستگو های زیر را به روشی قیاسی ثابت کنید.

۲. قیاس دفع $\sim q \wedge (p \to q) \Rightarrow \sim p$

جواب:راه اول:

$\sim q \wedge (p \to q) \equiv \sim q \wedge \sim (p \wedge \sim q)$ تعریف

$\equiv \sim q \wedge (\sim p \vee q)$ دمورگان- نفی مضاعف

$\equiv (\sim q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge q)$ پخش پذیری

$\equiv (\sim q \wedge \sim p) \vee c$ $q \wedge \sim q \equiv c$

$\equiv \sim q \wedge \sim p$ قضیه ی ۷

$\Longrightarrow \sim p$ اختصار

راه دوم:

$$\sim q \wedge (p \to q) \overset{\text{عکس نقیض}}{\equiv} \sim q \wedge (\sim q \to \sim p) \overset{\text{قیاس استثنایی}}{\Longrightarrow} \sim p$$

۳. برهان خلف $(\boldsymbol{p \to q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p \wedge \sim q \to c})$

جواب:

$p \to q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$ تعریف

$\equiv \sim (p \wedge \sim q) \vee c$ قضیه ی ۷

$\equiv \sim \big((p \wedge \sim q) \wedge \sim c\big)$ دمورگن- نفی مضاعف

$\equiv p \wedge \sim q \to c$ تعریف

روش دیگری درآخر کتاب آمده است.

۴. رفع مؤلفه $\boldsymbol{p}$ $(\boldsymbol{p \vee q \vee r}) \wedge \boldsymbol{\sim r \wedge \sim q \Longrightarrow p}$

جواب:

$(p \vee q \vee r) \wedge \sim r \wedge \sim q \equiv (r \vee q \vee p) \wedge \sim r \wedge \sim q$ جابجایی

$\equiv (r \vee q \vee p) \wedge \sim (r \vee q)$ دمورگان

$\equiv ((r \vee q) \vee p) \wedge \sim (r \vee q)$ شرکت پذیری

$\Longrightarrow p$ قضیه ی ۱-ج

۶. $(\boldsymbol{p \to q}) \iff \boldsymbol{p \to p \wedge q}$

جواب:

$p \to p \wedge q$	$\equiv \sim\big(p \wedge \sim(p \wedge q)\big)$	تعریف
	$\equiv \sim p \vee (p \wedge q)$	دمورگن- نفی مضاعف
	$\equiv (\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q)$	پخش پذیری
	$\equiv t \wedge (\sim p \vee q)$	$\sim p \vee p \equiv t$
	$\equiv \sim p \vee q$	قضیه ی ۷
	$\equiv \sim (p \wedge \sim q)$	دمورگن- نفی مضاعف
	$\equiv p \to q$	تعریف

۸. $\boldsymbol{p \to q \iff \sim p \vee q}$

جواب:

$$p \to q \overset{\text{تعریف}}{\equiv} \sim(p \wedge \sim q) \overset{\text{دمورگن – نفی مضاعف}}{\equiv} \sim p \vee q$$

۹. $(\boldsymbol{p \to r}) \wedge (\boldsymbol{q \to r}) \iff (\boldsymbol{p \vee q \to r})$

جواب:

$p \vee q \to r$	$\equiv \sim(p \vee q) \vee r$	تمرین ۸
	$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee r$	دمورگن
	$\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q)$	جابجایی
	$\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q)$	پخش پذیری
	$\equiv (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)$	جابجایی

$\equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$ تمرین ۸

روش دیگری در آخر این کتاب آمده است.

۱۰. $(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}$

جواب:

$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$ تمرین ۸

$\equiv \sim p \vee (q \wedge r)$ پخش پذیری

$\equiv p \to q \wedge r$ تمرین ۸

۱۳. $(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{r})$

جواب:

$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee r)$ تمرین ۸

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee r)$ جابجایی- شرکت پذیری

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$ خودتوانی

$\equiv \sim (p \wedge q) \vee r$ دمورگن

$\equiv p \wedge q \to r$ تمرین ۸

۱۴. $(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow \boldsymbol{q}$

جواب :

$(p \to q) \wedge (p \vee q) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)$ تمرین ۸

$\equiv (q \vee \sim p) \wedge (q \vee p)$ جابجایی

$\equiv q \vee (\sim p \wedge p)$ پخش پذیری

$\equiv q \vee c$ $\quad p \wedge \sim p \equiv c$

$\equiv q$ قضیه ی ۷

۱۷. $\boldsymbol{(p \to q) \land (q \to r) \land p \Rightarrow r}$

جواب:

$(p \to q) \land (q \to r) \land p \Longrightarrow (p \to r) \land p$ تعدی

$\equiv p \land (p \to r)$ جابجایی

$\Longrightarrow r$ قیاس استثنایی

۱۸. $\boldsymbol{[(p \to q) \lor (p \to r)] \land p \Rightarrow q \lor r}$

جواب:

$[(p \to q) \lor (p \to r)] \land p \equiv (p \to q \lor r) \land p$ تمرین ۱۲

$\equiv p \land (p \to q \lor r)$ جابجایی

$\Longrightarrow q \lor r$ قیاس استثنایی

۱۹. $\boldsymbol{(p \to q) \land (p \to r) \land p \Rightarrow q \lor r}$

جواب:

$(p \to q) \land (p \to r) \land p \Longrightarrow (p \lor p \to q \lor r) \land p$ قیاس ذوالوجهین موجب

$\equiv p \land (p \to q \lor r)$ خودتوانی - جابجایی

$\Longrightarrow q \lor r$ قیاس استثنایی

۲۰. $\boldsymbol{(p \to q) \land (r \to s) \land (\sim q \lor \sim s) \Rightarrow \sim p \lor \sim r}$

جواب:

$(p \to q) \land (r \to s) \land \sim q \lor \sim s \Longrightarrow (p \land r \to q \land s) \land \sim q \lor \sim s$ ذوالوجهین موجب

$\equiv \sim (q \land s) \land (p \land r \to q \land s)$ دمورگن- جابجایی

$\Longrightarrow \sim (p \wedge r)$ قیاس دفع

$\equiv \sim p \vee \sim r$ دمورگن

روش دیگری در آخر کتاب آمده است.

تمرین ۱. ۶- صفحه ی ۲۵.

۱. با استفاده از یک سور ، گزاره ی (معادله ی $x^2 - 3x + 2 = 0$ جواب دارد) منتخب از جبر مقدماتی را به زبان منطق بنویسید. حوزه ی سخن در اینجا چیست؟

جواب: گزاره نمای($x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$) را با $p(x)$ نشان می دهیم. بنابر این گزاره ی (معادله‌ی $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$ جواب دارد) به صورت $(\exists x)\ (p(x))$ می باشد. حوزه ی سخن در اینجا، اعداد حقیقی می‌باشد.

۲. اتحاد $[(x+a)^2 = x^2 + 2\,ax + a^2]$ از جبر مقدماتی را با استفاده از سور به زبان منطقی بر گردانید. حوزه ی سخن در اینجا چیست ؟

جواب: اتحاد $[(x+a)^۲ = x^۲ + ۲\,ax + a^۲]$ را با $p(x)$ نشان می دهیم. لذا این اتحاد به زبان منطق به صورت $(\forall x)(p(x))$ در می آید. حوزه ی سخن در اینجا اعداد حقیقی است.

۳. یک تعمیم قانون دمورگن در زیر آمده است:

الف) $\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \equiv \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_n$

ب) $\sim (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \ldots \wedge \sim p_n$

با به کار بردن سور های مناسب و حوزه ی سخن مناسب، این عبارات را به زبان منطقی بر گر دانید. حوزه ی سخن در اینجا چیست ؟

جواب: الف) $\sim[(\forall ۱ \leq i \leq n)(p_i)] \equiv (\exists ۱ \leq i \leq n)\ (\sim p_i)$

ب) $\sim[(\exists\ 1 \leq i\ \leq n)(p_i)] \equiv (\forall\ 1 \leq i\ \leq n)(\sim p_i)$

حوزه ی سخن در این اینجا، مجموعه ی $X = \{p_1, p_2, \dots p_n\}$ می باشد.

۴. گزاره ی هم ارز نقیض هر یک از گزار های زیر را با استفاده از قاعده ی نقیض سور بیابید.

الف) تمام مار ها خزنده هستند.

جواب: (وجود دارد ماری که خزنده نیست)≡ (تمام مارها خزنده هستند)~

ب) بعضی اسب ها رام هستند.

جواب: (تمام اسب ها وحشی هستند) ≡(بعضی از اسب ها رام هستند) ~

ج) بعضی از ریاضیدانان خوش مشرب نیستند.

جواب: (تمام ریاضیدانان خوش مشربند)≡ (بعضی ریاضیدانان خوش مشرب نیستند)~

د)تمام دانشجویان باهوش هستند یا پرکار.

جواب:

(بعضی دانشجویان نه باهوش هستند و نه پر کار) ≡ (تمام دانشجویان یا با هوش هستند یا پر کار)~

ه) هیچ کودکی حیله گر نیست.

جواب: (بعضی کودکان حیله گرند)≡ (هیچ کودکی حیله گر نیست)~

۵. حوزه ی سخن را برای هر یک از پنج گزاره ی مسئله ی ۴ بیابید.

جواب: الف) مارها ؛ ب)اسبها؛ ج)ریاضیدانان؛ د)دانشجویان؛ ه)کودکان

۷. از $(\forall x)\ (\sim q(x)) \equiv\ [(\exists x)\ (q(x))]\sim$ نتیجه بگیرید

$$.\sim[(\forall \boldsymbol{x})\ (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))]\ \equiv (\exists \boldsymbol{x})(\sim \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))$$

جواب : در عبارت $\sim[(\exists x)(q(x))] \equiv (\forall x)(\sim q(x))$ ، به جای گزاره نمای $q(x)$، گزاره نمای $\sim p(x)$ را قرار می دهیم . داریم:

$$\sim[(\exists x)(\sim p(x))] \equiv (\forall x)(\sim(\sim p(x))$$

از دو طرف نقیض می گیریم:

$$\sim\left(\sim\left[(\exists x)\left(\sim p(x)\right)\right]\right) \equiv\ \sim[(\forall x)(\sim\left(\sim p(x)\right)]$$

با استفاده ار قانون نفی مضاعف، از عبارت فوق می توان نتیجه گرفت:

$$[(\exists x)\ (\sim p\ (x))]\ \equiv\ \sim (\forall x)\ (p(x))$$

با جا به جا کردن طرف چپ و راست به عبارت زیر می رسیم که مورد نظر ماست:

$$\sim[(\forall x)(p(x))]\ \equiv\ [(\exists x)\ (\sim p(x))]$$

۸. ثابت کنید که

$\sim[(\exists \boldsymbol{x})(\sim \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}))] \equiv (\forall \boldsymbol{x})(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}))$ **و** $\sim[(\forall \boldsymbol{x})(\sim \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}))] \equiv (\exists \boldsymbol{x})(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}))$

[راهنمایی: قاعده ی نقض سور را به کار ببرید].

جواب: قاعده های نقیض سور عبارتند از:

$$\sim[(\forall x)(p(x))]\ \equiv\ (\exists x)\ (\ \sim p\ (x))(*)$$

$$\sim[(\exists x)(p(x))]\ \equiv\ (\forall x)\ (\ \sim p\ (x))(**)$$

با قرار دادن $\sim q(x)$ به جای $p(x)$ در عبارت $(*)$ داریم:

$$\sim[(\forall x)\ (\sim q(x))]\ \equiv\ (\exists x)\ (\sim(\sim q(x)))$$

با استفاده از قانون نفی مضاعف، از عبارت فوق نتیجه می گیریم:

$$\sim[(\forall x)\ (\sim q\ (\ x))]\ \equiv\ (\exists x)(q(x))$$

لذا اولین رابطه ی مورد نظر اثبات شد.

به طریق مشابه، با قرار دادن $\sim q(x)$ به جای $p(x)$ در عبارت (**)، می توانید عبارت دوم را نیز ثابت کنید.

تمرین ۱. ۷- صفحه ی ۲۹.

هر یک از مسائل ۱ تا ۴ ، یک برهان درستی صوری حکمی است که در مسئله مشخص شده است. برای هر خط که درست نیست دلیل بیاورید.

(۱)

۱. $\boldsymbol{p \vee q \to r \wedge s}$	(ف)
۲. $\boldsymbol{\sim r\ /\therefore\ \ \sim q}$	(ف /ن)
۳. $\sim r\ \vee\ \sim s$	۲، جمع
۴. $\sim(r \wedge s\ )$	۳، دمورگن
۵. $\sim(p\ \vee\ q)$	۱ ، ۴، قیاس دفع
۶. $\sim p\ \wedge\ \sim q$	۵ ، دمورگن
۷. $\sim q$	۶، اختصار

(۲)

۱. $\boldsymbol{p \wedge q \to r}$	(ف)
۲. $\boldsymbol{(p\ \to r)\ \to s}$	(ف)
۳. $\boldsymbol{q \to s \wedge u\ \ /\therefore\ \sim q \vee u}$	(ف / ن)

۴. $q \wedge p \rightarrow r$ — ۱، جابجایی

۵. $q \rightarrow (p \rightarrow r)$ — ۴، تفکیک دو مقدم

۶. $q \rightarrow s$ — ۲، ۵، تعدی

۷. $\sim q \vee s$ — ۶، تمرین ۸ – بخش ۵.۱

۸. $(\sim q \vee s) \wedge (\sim q \vee u)$ — ۳، ۷، ترکیب عطفی

۹. $\sim q \vee (s \wedge u)$ — ۸، پخش پذیری

۱۰. $q \rightarrow s \wedge u$ — ۹، تمرین ۸ – بخش ۵.۱

(۳)

۱. $\boldsymbol{p \wedge (q \vee s)}$ — **(ف)**

۲. $\boldsymbol{p \rightarrow (s \rightarrow u)}$ — **(ف)**

۳. $\boldsymbol{p \rightarrow (q \rightarrow r)}$ — **(ف)**

۴. $\boldsymbol{\sim r / \therefore u}$ — **(ف/ن)**

۵. $p \wedge s \rightarrow u$ — ۲، تفکیک دو مقدم

۶. $p \wedge q \rightarrow r$ — ۳، تفکیک دو مقدم

۷. $(p \wedge q) \vee (p \wedge s)$ — ۱ ، پخش پذیری

۸. $(p \wedge q \rightarrow r) \wedge (p \wedge s \rightarrow u)$ — ۵ ، ۶ ،ترکیب عطفی

۹. $((p \wedge q) \vee (p \wedge s)) \rightarrow r \vee u$ — ۸ ، قیاس ذوالوجهین موجب

۱۰. $r \vee u$ — ۷ ،۹ ، قیاس استثنایی

۱۱. u — ۴ ، ۱۰ ، رفع مؤلفه

(۴)

۱. $\boldsymbol{\sim p \wedge s \wedge \sim(\sim p \wedge q)}$ — **(ف)**

۲. $\boldsymbol{p \vee q \vee (r \wedge s) / \therefore \sim p \wedge r}$ **(ف/ن)**

۳. $\sim p \wedge s$ ۱، اختصار

۴. $\sim p$ ۳، اختصار

۵. $p \vee (q \vee (r \wedge s))$ ۲ ، شرکت پذیری

۶. $q \vee (r \wedge s)$ ۵،۴ ، رفع مؤلفه

۷. $(q \vee r) \wedge (q \vee s)$ ۶، پخش پذیری

۸. $(q \vee r)$ ۷ ، اختصار

۹. $\sim p \wedge (q \vee r)$ ۴ ، ۸ ، ترکیب عطفی

۱۰. $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$ ۹ ، پخش پذیری

۱۱. $(\sim p \wedge s) \wedge \sim(\sim p \wedge q)$ ۱ ، شرکت پذیری

۱۲. $\sim(\sim p \wedge q)$ ۱۱، اختصار

۱۳. $\sim p \wedge r$ ۱۰ ، ۱۲ ، رفع مؤلفه

برای هر یک از حکمهای زیر یک برهان مستقیم یا یک برهان غیر مستقیم درستی بیاورید.

(۷)

۱. $\boldsymbol{(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow D \wedge E)}$ **(ف)**

۲. $\boldsymbol{A \wedge C / \therefore E \vee F}$ **(ف/ن)**

۳. $((A \vee B) \wedge A) \rightarrow D \wedge E$ ۱ ،تفکیک دو مقدم

۴. $(A \wedge (A \vee B)) \rightarrow D \wedge E$ ۳، جابجایی

۵. $((A \wedge A) \vee (A \wedge B)) \rightarrow D \wedge E$ ۴ ، پخش پذیری

۶. $A \vee (A \wedge B) \rightarrow D \wedge E$ ۵، خودتوانی

۷. A ۲، اختصار

۸. $A \vee (A \wedge B)$	۷، جمع
۹. $D \wedge E$	۶ ، ۸، قیاس استثنایی
۱۰. E	۹ ،اختصار
۱۱. $E \vee F$	۱۰ ، جمع

(۸)

۱. $\boldsymbol{A \vee B}$	**(ف)**
۲. $\boldsymbol{\sim B \vee C \;/\; \therefore\; A \vee C}$	**(ف/ن)**
۳. $\sim(\sim A) \vee B$	۱، نفی مضاعف
۴. $\sim A \rightarrow B$	۳، تمرین ۸ – بخش ۵.۱
۵. $B \rightarrow C$	۲ ، تمرین ۸ – بخش ۵.۱
۶. $\sim A \rightarrow C$	۴، ۵، تعدی
۷. $A \vee C$	۶، تمرین ۸ – بخش ۵.۱

(۹)

۱. $\boldsymbol{B \vee C \rightarrow B \wedge A}$	**(ف)**
۲. $\boldsymbol{\sim B \;/\; \therefore \sim C}$	**(ف/ن)**
۳. $\sim(B \wedge A) \rightarrow \sim(B \vee C)$	۱ ، عکس نقیض
۴. $\sim B \vee \sim A \rightarrow \sim B \wedge \sim C$	۳، دمورگن
۵. $\sim B \vee \sim A$	۲ ، جمع
۶. $\sim B \wedge \sim C$	۴،۵ ، قیاس استثنایی
۷. $\sim C$	۶ ، اختصار

در برهان حکم های زیر ،از علامتهای پیشنهادی استفاده کنید.

۱۲. رئیس مرا تمجید می کند تنها اگر بتوانم به خودم مغرور باشم. یا من در کلاس خوب کار می کنم یا نمی توانم به خودم مغرور باشم. اگر در ورزش کوشا باشم، آنگاه نمی توانم در کلاس خوب کار کنم. بنابراین، اگر رئیس مرا تمجید کند، آنگاه نمی توانم در ورزش کوشا باشم. (رئیس مرا تمجید می کند = D. می توانم به خودم مغرور باشم =P . در کلاس خوب کار می کنم=C . در ورزش کوشا هستم =S).

جواب:

۱. $\boldsymbol{D \rightarrow P}$	(ف)
۲. $\boldsymbol{C \vee \sim P}$	(ف)
۳. $\boldsymbol{S \rightarrow \sim C /\therefore\ D \rightarrow \sim S}$	(ف / ن)
۴. $P \rightarrow C$	۲ ، تعریف
۵. $D \rightarrow C$	۱ ، ۴، تعدی
۶. $\sim C \rightarrow \sim D$	۵، عکس نقیض
۷. $S \rightarrow \sim D$	۳ ، ۶، تعدی
۸. $D \rightarrow \sim S$	۷ ، عکس نقیض

تمرین ۱. ۸- صفحه ی ۳۴.

۳. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n) = 2^n$$

جواب: حکم برای $n = ۱$ برقرار است، زیرا:

تمرین ۲

$$C(۱,۰) + C(۱,۱) \quad = \quad ۱ + ۱ = ۲^۱$$

فرض استقراء: فرض کنیم حکم برای $n = k$ درست باشد ، یعنی :

$$C(k,0)+C(k,1)+\cdots+C(k,k)=2^k$$

حال حکم را برای $n=k+1$ ثابت می کنیم:

$$C(k+1,0)+C(k+1,1)+C(k+1,2)+\cdots+C(k+1,k)+$$

$$C(k+1,k+1)\overset{\text{تعریف۷}}{=}C(k+1,0)+[C(k,1)+C(k,0)]+[C(k,2)$$

$$+C(k,1)]+\cdots+[C(k,k)+C(k,k-1)]+C(k+1,k+1)$$

$$\overset{\text{دسته بندی می کنیم}}{=}[C(k+1,0)+C(k,1)+C(k,2)+\cdots+C(k,k)]$$

$$+[C(k,0)+C(k,1)+\cdots+C(k,k-1)+C(k+1,k+1)]$$

$$\overset{C(k,0)=C(k+1,0)=1}{=}[C(k,0)+C(k,1)+C(k,2)+\cdots+C(k,k)]$$

$$+[C(k,0)+C(k,1)+\cdots+C(k,k-1)+C(k,k)]\overset{\text{فرض استقراء}}{\equiv}2^k$$
$$+2^k=2\times 2^k=2^{k+1}$$

بنابراین حکم برای $n=k+1$ نیز برقرار است.

۵. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$\mathbf{1.2+2.3+\cdots+r(r+1)+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

جواب: حکم را برای $n=1$ بررسی می کنیم:

$$1.(1+1)=2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}\surd$$

فرض استقراء: فرض کنیم حکم برای $n=k$ درست باشد. یعنی:

$$۱.۲ + ۲.۳ + \cdots + r(r+۱) + \cdots + k(k+۱) = \frac{k(k+۱)(k+۲)}{۳}$$

حکم را برای $n = k + ۱$ ثابت می کنیم:

$$۱.۲ + ۲.۳ + \cdots + r(r+۱) + \cdots + k(k+۱) + (k+۱)(k+۲)$$

$$\overset{\text{فرض استقراء}}{=} \frac{k(k+۱)(k+۲)}{۳} + (k+۱)(k+۲)$$

$$= \frac{k(k+۱)(k+۲) + ۳(k+۱)(k+۲)}{۳}$$

$$\overset{\text{فاکتور گیری}}{=} \frac{(k+۱)(k+۲)(k+۳)}{۳}$$

بنابراین حکم برای $n = k + ۱$ نیز درست است.

۶. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

جواب: حکم را برای $n = ۱$ بررسی می کنیم:

$$۱^۲ = ۱ = \frac{۱(۱+۱)(۲(۱)+۱)}{۶} = ۱\checkmark$$

فرض استقراء: فرض کنیم حکم برای $n = k$ درست باشد. یعنی:

$$۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + k^۲ = \frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}$$

حال حکم را برای $n = k + ۱$ اثبات می کنیم:

$$۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + k^۲ + (k+۱)^۲ \overset{\text{فرض استقراء}}{=} \frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}$$

$$+(k+۱)^{۲}=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)+۶(k+۱)^{۲}}{۶}$$

$$=\frac{(k+۱)\big(k(۲k+۱)+۶(k+۱)\big)}{۶}=\frac{(k+۱)\big(۲k^{۲}+k+۶k+۶\big)}{۶}$$

$$=\frac{(k+۱)(۲k^{۲}+۷k+۶)}{۶}=\frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶}$$

$$=\frac{(k+۱)(k+۲)(۲(k+۱)+۱)}{۶}$$

لذا حکم برای $n=k+۱$ نیز درست است.

۸. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$(1+2+3+\cdots+n)^2=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

جواب: حکم را برای $n=۱$ بررسی می کنیم: $۱^{۲}=۱^{۳}\ \checkmark$

فرض استقراء: فرض کنیم حکم را برای $n=k$ درست باشد یعنی:

$$(۱+۲+۳+\cdots..+k)^{۲}=۱^{۳}+۲^{۳}+\cdots+k^{۳}$$

حکم را برای $n=k+۱$ ثابت می کنیم:

$$\big(۱+۲+\cdots+k+(k+۱)\big)^{۲}=(۱+۲+\cdots+k)^{۲}+(k+۱)^{۲}$$

$$+۲(۱+۲+\cdots+k)(k+۱)\overset{\text{فرض استقراء – تمرین ۴}}{=}۱^{۳}+۲^{۳}+\cdots+k^{۳}+$$

$$(k^{۲}+۲k+۱)+۲\,\frac{k(k+۱)}{۲}(k+۱)=۱^{۳}+۲^{۳}+\cdots+k^{۳}$$

$$+(k^{۲}+۲k+۱)+(k^{۳}+۲k^{۲}+k)=۱^{۳}+۲^{۳}+\cdots+k^{۳}$$

$$+(k^{۳}+۳k^{۲}+۳k+۱)=۱^{۳}+۲^{۳}+\cdots+k^{۳}+(k+۱)^{۳}$$

بنابراین حکم برای $n = k + ۱$ نیز درست است.

۱۰. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n،

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{\mathbf{n}}{n+1}$$

جواب: حکم را برای $n = ۱$ بررسی می کنیم:

$$\frac{۱}{۱\times ۲}=\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱+۱}\surd$$

فرض استقراء: فرض کنیم حکم برای $n = k$ درست باشد، یعنی:

$$\frac{۱}{۱.۲}+\frac{۱}{۲.۳}+\cdots+\frac{۱}{k(k+۱)}=\frac{k}{k+۱}$$

حکم را برای $n = k + ۱$ ثابت می کنیم:

$$\frac{۱}{۱.۲}+\frac{۱}{۲.۳}+\cdots+\frac{۱}{k(k+۱)}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}\overset{\text{فرض استقراء}}{=}\frac{k}{k+۱}$$

$$+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k(k+۲)+۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k^{۲}+۲k+۱}{(k+۱)(k+۲)}$$

$$=\frac{(k+۱)^{۲}}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k+۱}{k+۲}=\frac{k+۱}{(k+۱)+۱}$$

۱۱. قوانین دمورگن تعمیم یافته ی زیر را ثابت کنید.

الف) $\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Leftrightarrow \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_n$

ب) $\sim(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \Leftrightarrow \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \ldots \wedge \sim p_n$

جواب: اثبات را به استقرء روی n پیش می بریم. حکم (الف) را ثابت می کنیم. اثبات حکم (ب) مشابه است.

الف) بنابر قضیه ی ۳، حکم برای $n=2$ درست است.

فرض استقراء: فرض کنیم حکم برای $n=k$ درست باشد. یعنی:

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \Leftrightarrow \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_k$$

حکم را برای $n=k+1$ ثابت می کنیم:

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k \wedge p_{k+1}) \overset{\text{شرکت پذیری}}{\Longleftrightarrow} \sim((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \wedge p_{k+1})$$

$$\overset{\text{قانون دمورگن}}{\Longleftrightarrow} \sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \vee \sim p_{k+1} \overset{\text{فرض استقراء}}{\Longleftrightarrow} (\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee$$

$$\sim p_k) \vee \sim p_{k+1} \overset{\text{شرکت پذیری}}{\Longleftrightarrow} \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_k \vee \sim p_{k+1}$$

بنابر این حکم برای $n=k+1$ نیز درست است.

۱۲. قوانین پخش پذیری تعمیم یافته ی زیر را ثابت کنید.

الف) $\boldsymbol{p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p \wedge q_n)}$

ب) $\boldsymbol{p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \ldots \wedge (p \vee q_n)}$

جواب: اثبات را به استقرء روی n پیش می بریم. حکم (الف) را ثابت می کنیم. اثبات حکم (ب) مشابه است.

الف) بنابر قضیه ی (۴-ب)، حکم برای $n=2$ درست است.

فرض استقراء : فرض کنیم حکم برای $n=k$ درست باشد. یعنی :

$$p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_k) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p \wedge q_k)$$

حکم را برای $n = k + ۱$ ثابت می کنیم:

$$p \wedge (q_۱ \vee q_۲ \vee \dots \vee q_k \vee q_{k+۱})$$

$$\overset{\text{شرکت پذیری}}{\Longleftrightarrow} \; p \wedge ((q_۱ \vee q_۲ \vee \dots \vee q_k) \vee q_{k+۱})$$

$$\overset{\text{قضیه ۴–ب}}{\Longleftrightarrow} \Big(p \wedge (q_۱ \vee q_۲ \vee \dots \vee q_k)\Big) \vee (p \wedge q_{k+۱})$$

$$\overset{\text{فرض استقراء}}{\Longleftrightarrow} (p \wedge q_۱) \vee (p \wedge q_۲) \vee \dots \vee (p \wedge q_k) \vee (p \wedge q_{k+۱})$$

$$\overset{\text{شرکت پذیری}}{\Longleftrightarrow} (p \wedge q_۱) \vee (p \wedge q_۲) \vee \dots \vee (p \wedge q_k) \vee (p \wedge q_{k+۱})$$

بنابراین حکم برای $n = k + ۱$ نیز برقرار است.

۱۳. ثابت کنید که اگر k یک عدد طبیعی ثابت باشد،آنگاه برای تمام اعداد طبیعی n،

$$\begin{aligned}(\mathbf{1.2} \dots \boldsymbol{k}) + \big(\mathbf{2.3} \dots (\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\big) + \cdots + [\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) \dots (\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1})] \\ = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\boldsymbol{n}+\mathbf{2}) \dots (\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

جواب: حکم را برای $n = ۱$ بررسی می کنیم:

$$۱.۲ \dots k = \frac{۱}{k+۱}\; ۱(۱+۱)\,(۱+۲) \dots (۱+k)\surd$$

فرض استقراء: فرض کنیم حکم برای n درست باشد. یعنی:

$$\Big(۱.۲ \dots . k\Big) + \big(۲.۳ \dots (k+۱)\big) + \cdots + [n(n+۱) \dots (n+k-۱)]$$

$$= \frac{۱}{(k+۱)}\, n(n+۱)(n+۲) \dots (n+k)$$

حکم را برای $n + ۱$ ثابت می کنیم:

$$\left(۱.۲ \dots k\right) + \left(۲.۳ \dots (k + ۱)\right) + \cdots + [n(n + ۱) \dots (n + k - ۱)] +$$

$$(n + ۱)(n + ۲) \dots (n + k) \overset{\text{فرض استقراء}}{=} \frac{۱}{k + ۱} n(n + ۱)(n + ۲) \dots$$

$$(n + k) + (n + ۱)(n + ۲) \dots (n + k) \overset{\text{فاکتورگیری}}{=} \frac{۱}{k + ۱} [n(n + ۱)$$

$$(n + ۲) \dots (n + k) + (n + ۱)(n + ۲) \dots (n + k)(k + ۱)]$$

$$\overset{\text{فاکتورگیری}}{=} \frac{۱}{k + ۱} [(n + ۱)(n + ۲) \dots (n + k)(n + k + ۱)]$$

بنابراین حکم برای $n + ۱$ نیز درست است.

فصل دوم

مفهوم مجموعه

تمرین ۲.۱ – صفحه ی ۳۹.

۵. ثابت کنید که $(A \subseteq \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)$

جواب: فرض کنیم $A \subseteq \emptyset$. از طرفی طبق قضیه ی ۱، $\emptyset \subseteq A$. در نتیجه بنا به تمرین۴، $A = \emptyset$.

۶. ثابت کنید که:

الف) $[(A \subset B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subset C)$

ب) $[(A \subseteq B) \wedge (B \subset C)] \Rightarrow (A \subset C)$

جواب : ب)

۱. $(x \in A \to x \in B)\ \forall x$	فرض $(A \subseteq B)$
۲. $(x \in B \to x \in C)\ \forall x$ ۳. $\exists y\ s.t\ (y \in C \wedge y \notin B)$	فرض $(B \subset C)$
$/\therefore A \subset C/$	نتیجه
۴. $(x \in A \to x \in C)\forall x$	۱،۲ و تعدی
۵. $y \notin B$	۳ و اختصار
۶. $y \in C$	۳ و اختصار
۷. $y \notin A$	۱ ، ۵ و قیاس دفع
۸. $y \in C \wedge y \notin A$	۶ ، ۷ و ترکیب عطفی
۹. $A \subset C$	۴، ۸ و تعریف $\subset$

۸. در هر یک از حکم های زیر تعیین کنید حکم راست است یا دروغ.

درستی احکامی را که راست هستند ثابت کنید. نادرستی احکام دروغ را با یک مثال ثابت کنید. (مثالی را که نادرستی حکمی را ثابت کند، مثال نقض گویند).

الف) اگر $A \in x$ و $A \in B$، آنگاه $x \in B$.

ب) اگر $A \subseteq B$ و $B \in C$، آنگاه $A \in C$.

ج) اگر $A \not\subseteq B$ و $B \subseteq C$، آنگاه $A \not\subseteq C$.

د) اگر $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq C$ آنگاه $A \not\subseteq C$.

ه) اگر $x \in A$ و $A \not\subseteq B$، آنگاه $x \notin B$.

و) اگر $A \subseteq B$ و $x \notin B$ آنگاه $x \notin A$

جواب: الف) این گزاره دروغ است. مثال نقض: فرض کنیم $A = \{۲,۳\}$ و $B = \{۴, \{۲,۳\}\}$. مشاهده می شود که $۲ \in A$ و $A \in B$ ولی $۲ \notin B$.

ب) این گزاره دروغ است. مثال نقض: فرض کنیم $A = \{۱,۲\}$، $B = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $C = \{۵, \{۱,۲,۳,۴\}\}$. ملاحظه می شود که $A \subseteq B$ و $B \in C$ ولی $A \notin C$.

ج) این گزاره دروغ است. مثال نقض: فرض کنیم $A = \{a, b\}$، $B = \{a, c\}$ و $C = \{a, b, c\}$. ملاحظه می‌شود که $A \not\subseteq B$، $B \subseteq C$ اما $A \subseteq C$.

د) این گزاره دروغ است. مثال نقض: فرض کنیم $A = \{۱,۲\}$، $B = \{۲,۳\}$ و $C = \{۱,۲,۴\}$. ملاحظه می‌شود که $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq C$ ولی $A \subseteq C$.

هـ) این گزاره دروغ است. مثال نقض: فرض کنیم $A = \{x, y\}$ و $B = \{y, z\}$. ملاحظه می شود که $y \in A$ و $A \not\subseteq B$ ولی $y \in B$.

و) این گزاره درست است. فرض کنیم $A \subseteq B$ و $x \notin B$. از $A \subseteq B$ نتیجه می گیریم $x \in A \implies x \in B$. از گزاره های $x \notin B$، $(x \in A \implies x \in B)$ و قیاس دفع، نتیجه می‌گیریم $x \notin A$.

۹. تعیین کنید کدام یک از گزاره های زیر راست و کدام یک دروغ است.

الف) $\boldsymbol{x \in \{\{x\},\{x,y\}\}}$

ب) $\boldsymbol{\{x\} \subseteq \{\{x\},\{x,y\}\}}$

ج) $\boldsymbol{\{1,x,2\} \subseteq \{1,2,x\}}$

د) $\boldsymbol{\{a,b\} \subseteq \{b,a\}}$

هـ) $\boldsymbol{\{x\} \in \{x\}}$

جواب: الف) دروغ است. مجموعه ی سمت راست دارای دو عضو $\{x\}$ و $\{x,y\}$ است، لذا x عضوی از این مجموعه نیست.

ب) دروغ است. مشابه قسمت الف)، چون x عضوی از مجموعه ی $\{\{x\},\{x,y\}\}$ نیست، مجموعه ی $\{x\}$، زیر مجموعه ای از $\{\{x\},\{x,y\}\}$ نیست.

ج) درست است. هر مجموعه ،زیر مجموعه ی خودش است.

د) درست است. هر مجموعه ، زیر مجموعه ی خودش است.

هـ) دروغ است. مجموعه ی سمت راست تنها یک عضو x دارد. بنابراین $\{x\}$، عضوی از این مجموعه نیست.

۱۰. تعیین کنید گزاره های زیر راست هستند یا دروغ.

الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$.

ب)$. \emptyset \in \{\emptyset\}$

ج) $. \{\emptyset\} \in \emptyset$

د)$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}$

جواب: الف) این گزاره دروغ است. مجموعه ی سمت راست، یک عضو دارد در حالی که مجموعه ی سمت چپ عضوی ندارد.

ب) مجموعه ی $\{\emptyset\}$ دارای یک عضو، یعنی $\emptyset$ است ، لذا گزاره ی $\emptyset \in \{\emptyset\}$ راست است.

ج) این گزاره دروغ است، زیرا مجموعه ی $\emptyset$ عضوی ندارد.

د) این گزاره دروغ است. مجموعه ی سمت راست دو عضو دارد که به صورت $\{\emptyset\}$و $\emptyset$ می باشند.

تمرین ۲. ۲ – صفحه ی ۴۳.

۴. هر یک از مجموعه های زیر را با نماد مجموعه ساز نشان دهید.

$$\boldsymbol{B = \{-1, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, 0\}}$$

$$\boldsymbol{D = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}}$$

جواب:

$$B = \{\frac{-n}{۳} \mid n = ۰,۱,۲,۳\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - (۱ - \sqrt{۳}))\ (x - (۱ + \sqrt{۳})) = ۰\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid (x + \sqrt{۳} - ۱)\big(x - \sqrt{۳} - ۱\big) = ۰\}$$

۸. مجموعه ی $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right)\right)$ را بنویسید.آیا این مجموعه، بیش از مجموعه ی $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ عنصر دارد؟

جواب: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \Rightarrow \mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

بنابراین:

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right)\right) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset\}$$

لذا این مجموعه ، چهار عضو دارد در حالی که $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ دو عضو دارد.

۹.آیا برای هر مجموعه ی A و هر مجموعه ی B، $\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cup B)$؟ چرا؟

جواب: خیر. قرار می دهیم $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$. داریم:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}, \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{b\}\} \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$

$$\mathcal{P}(A \cup B) = (\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

در نتیجه $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

۱۰.آیا برای هر مجموعه ی A و هر مجموعه ی B، $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$؟ چرا؟

جواب: بلی. داریم:

$$X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow$$

$$X \subseteq A \wedge X \subseteq B \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$$

۱۱. فرض کنید B یک زیر مجموعه ی A باشد و $\mathcal{P}(A:B) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X \supseteq B\}$.

الف) فرض کنید $B = \{a,b\}$ و $A = \{a,b,c,d,e\}$. عنصرهای مجموعه ی $\mathcal{P}(A:B)$ را بنویسید؛ تعداد این عنصرها را تعیین کنید.

ب) نشان دهید: $\mathcal{P}(A:\emptyset) = \mathcal{P}(A)$

جواب: الف)

$$\mathcal{P}(A:B) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X \supseteq B\}$$
$$= \{\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},$$
$$\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\},\{a,b,c,d,e\}\}$$

ب)

$$\mathcal{P}(A:\emptyset) = \{X \in \mathcal{P}(A) | X \supseteq \emptyset\} = \{X \in \mathcal{P}(A)\} = \mathcal{P}(A)$$

۱۲. A را یک مجموعه ی n عنصری و B را یک زیر مجموعه ی m عنصری A فرض کنید، $n \geq m$.

الف) تعداد عنصرهای مجموعه ی $\mathcal{P}(A:B)$ را پیدا کنید.

ب) B را $\emptyset$ گرفته ، قضیه ی ۳ را از (الف) نتیجه بگیرید.

جواب: چون هر عنصر $\mathcal{P}(A:B)$ باید شامل B باشد، مجموعه ی B را از مجموعه ی A برداشته و زیرمجموعه های $A - B$ را بدست می آوریم که تعداد آنها ۲^{n-m} می باشد. حال اگر مجموعه ی B را به هر کدام از این زیرمجموعه ها الحاق کنیم، یک عنصر از مجموعه ی $\mathcal{P}(A:B)$ بدست می آید. لذا $\mathcal{P}(A:B)$ دارای ۲^{n-m} عنصر است.

ب) اگر $B = \emptyset$، آنگاه $m = ۰$ (تعداد عناصر مجموعه ی $\emptyset$ برابر با صفر است). در نتیجه $\mathcal{P}(A:\emptyset) = \mathcal{P}(A)$ دارای $۲^{n-۰} = ۲^n$ عنصر است.

تمرین۲. ۳- صفحه ی ۴۶.

۶. ثابت کنید که

الف) از $(\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C})$، $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \subseteq \boldsymbol{C}$ نتیجه می شود.

ب) از $(\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C})$، $\boldsymbol{A} \subseteq (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$ نتیجه می شود.

جواب: ب)

۱. $(x \in A \rightarrow x \in B)$	(فرض $A \subseteq B$)
۲. $(x \in A \rightarrow x \in C) / \therefore A \subseteq (B \cap C)$	(فرض $A \subseteq C$)/نتیجه)
۳. $(x \in A \wedge x \in A \rightarrow x \in B \wedge x \in C)$	۱، ۲ وقیاس ذوالوجهین موجب
۴. $(x \in A \rightarrow x \in B \wedge x \in C)$	۳ و خودتوانی
۵. $(x \in A \rightarrow x \in B \cap C)$	۴ و تعریف
۶. $A \subseteq B \cap C$	۵ و تعریف $\subseteq$

۸. ثابت کنید که اگر $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$، آنگاه $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{A}) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{B})$.

جواب:

$$X \in \mathcal{P}(A) \xRightarrow{\text{طبق تعریف}} X \subseteq A \xRightarrow{A\subseteq B \text{ و تعدی}} X \subseteq B \xRightarrow{\text{طبق تعریف}} X \in \mathcal{P}(B)$$

۹. ثابت کنید.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$$

جواب: اگر $A = B$، آنگاه: $A \cup B = A \cup A = A = A \cap A = A \cap B$

بر عکس، فرض کنیم $A \cup B = A \cap B$.

$$x \in A \xrightarrow{\text{قانون جمع}} x \in A \vee x \in B \xrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} x \in A \cup B \xrightarrow{A \cup B = A \cap B}$$

$$x \in A \cap B \xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} x \in A \wedge x \in B \xrightarrow{\text{اختصار}} x \in B$$

لذا $A \subseteq B$. اثبات $B \subseteq A$ مشابه است. در نتیجه $A = B$.

۱۰. ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$، آنگاه برای هر مجموعه ی C، $A \cup C \subseteq B \cup C$ و $A \cap C \subseteq B \cap C$.

جواب: فرض کنیم $A \subseteq B$ و C یک مجموعه ی دلخواه باشد. از $A \subseteq B$ نتیجه می گیریم:

$$(x \in A \Rightarrow x \in B) \qquad (۱)$$

از طرفی داریم $C \subseteq C$ (هر مجموعه، زیر مجموعه ی خودش است). لذا:

$$(x \in C \Rightarrow x \in C) \qquad (۲)$$

با استفاده از (۱) و (۲) و قیاس ذوالوجهین موجب نتیجه می گیریم:

$$(x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \qquad (۳)$$

$$(x \in A \vee x \in C \Rightarrow x \in B \vee x \in C \qquad (۴)$$

گزاره ی (۳) معادل گزاره ی $(x \in A \cap C \Longrightarrow x \in B \cap C)$ می باشد که نتیجه می دهد

$A \cap C \subseteq B \cap C$ (برای هر C).

گزاره ی (۴) معادل گزاره ی $(x \in A \cup C \Longrightarrow x \in B \cup C)$ که نتیجه می دهد

$A \cup C \subseteq B \cup C$ (برای هر C).

۱۲. درستی یا نادرستی دو عبارت زیر را تحقیق کنید.

الف) اگر $A \cup C = A \cup B$، آنگاه $B = C$.

ب) اگر $A \cap C = A \cap B$، آنگاه $B = C$.

جواب: الف) نادرست است. قرار می دهیم $A = \{۱, ۲\}$، $B = \{۲,۳\}$ و $C = \{۳\}$. حال داریم:

$$A \cup B = \{۱,۲,۳\} \quad , \quad A \cup C = \{۱,۲,۳\}$$

در نتیجه $A \cup B = A \cup C$ در حالی که $B \neq C$.

ب) نادرست است. قرار می دهیم $A = \{۱, ۲,۳\}$، $B = \{۳,۴\}$ و $C = \{۳\}$. حال داریم:

$$A \cap B = \{۳\} \qquad A \cap C = \{۳\}$$

در نتیجه $A \cap B = A \cap C$ در حالیکه $B \neq C$.

۱۳. ثابت کنید که برای مجموعه های $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ داریم:

$$\boldsymbol{A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)}$$

جواب: حکم را به استقراء روی n ثابت می کنیم. برای هر دو مجموعه ی $B_۱$ و $B_۲$ طبق قانون پخش پذیری داریم: $A \cap (B_۱ \cup B_۲) = (A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲)$.

فرض کنیم حکم برای هر k مجموعه ی دلخواه $B_۱, B_۲ \dots, B_k$ برقرار باشد. یعنی:

$$A \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup \dots \cup B_k) = (A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲) \cup \dots \cup A \cap B_k)$$

حکم را برای $k + ۱$ مجموعه ی دلخواه $B_۱, B_۲, \dots, B_k, B_{k+۱}$ ثابت می کنیم:

$$A \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup \dots \cup B_k \cup B_{k+۱})$$

$$\overset{\text{شرکت پذیری}}{=} A \cap \left((B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_k) \cup B_{k+۱}\right)$$

$$\overset{\text{پایه‌ی استقراء}}{=} (A \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_k)) \cup (A \cap B_{k+۱})$$

$$\overset{\text{فرض استقراء}}{=} ((A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)) \cup (A \cap B_{k+۱})$$

$$\overset{\text{شرکت پذیری}}{=} (A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲) \cup \ldots \cup (A \cap B_k) \cup (A \cap B_{k+۱})$$

۱۴. ثابت کنید

الف)اگر برای $i = 1, 2, \ldots, n$، $A_i \subseteq B$ ، آنگاه $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \subseteq B$.

ب) اگر برای $i = 1, 2, \ldots, n$، $A \subseteq B_i$ آنگاه $A \subseteq B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$.

جواب: الف) اثبات به استقراء روی n. حکم برای $n = ۲$ طبق تمرین ۶ همین بخش برقرار است. فرض کنیم حکم برای $n = k$ برقرار باشد، یعنی اگر برای $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $A_i \subseteq B$ آنگاه $A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_k \subseteq B$. حکم را برای $n = k + ۱$ ثابت می کنیم.

فرض کنیم برای $i = ۱, ۲, \ldots, k + ۱$، $A_i \subseteq B$. بنا به فرض استقراء برای k مجموعه داریم:

$(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_k) \subseteq B$. قرار می دهیم $A' = (A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_k)$. چون $A' \subseteq B$ و $A_{k+۱} \subseteq B$، بنا به پایه ی استقراء داریم $A' \cup A_{k+۱} \subseteq B$ و این یعنی:

$$(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+۱} \subseteq B.$$

از قانون شرکت پذیری نتیجه می گیریم $(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+۱}) \subseteq B)$ و حکم اثبات شود.

تمرین۲. ۴- صفحه ی ۵۰.

۴. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید $A \cap B = \emptyset$ اگر و تنها اگر $A \cap B' = A$

جواب: فرض کنیم $A \cap B = \emptyset$. نشان می دهیم $A \cap B' = A$. داریم:

$$A \cap B' \overset{\text{مثال۶}}{=} A \cap (U - B) = (A \cap U) - (A \cap B) = (A \cap U) - \emptyset = A - \emptyset = A$$

برعکس، فرض کنیم $A \cap B' = A$. نشان می دهیم $A \cap B = \emptyset$. داریم:

$$A \cap B = (A \cap B') \cap B \overset{\text{شرکت پذیری}}{=} A \cap (B' \cap B) \overset{\text{قضیه۵}}{=} A \cap \emptyset = \emptyset$$

۵. ثابت کنید که برای هر دو مجموعه ی A و B، $A' - B' = B - A$.

جواب:

$$A' - B' \overset{\text{مثال۵}}{=} A' \cap (B')' \overset{\text{قضیه۵}}{=} A' \cap B \overset{\text{جابجایی}}{=} B \cap A' \overset{\text{مثال۵}}{=} B - A$$

۹. گیریم $A_1, A_2, \dots, A_n$ و C مجموعه هستند. ثابت کنید :

$$(A_1 - C) \cup (A_2 - C) \cup \dots \cup (A_n - C) = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) - C$$

جواب: حکم را به استقراء روی n ثابت می کنیم. برای $n = ۲$، حکم طبق تمرین (۸-الف) برقرار است. فرض کنیم حکم برای $n = k$ برقرار باشد. یعنی برای هر k مجموعه ی $A_۱, A_۲, \dots, A_k$ و مجموعه ی C داشته باشیم:

$$(A_۱ - C) \cup (A_۲ - C) \cup \dots \cup (A_k - C) = (A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_k) - C$$

حکم را برای $n = k + ۱$ ثابت می کنیم . فرض کنیم $A_۱, A_۲ \ldots., A_{k+۱}$ ، $k + ۱$ مجموعه و C یک مجموعه ی دلخواه باشد. داریم:

$$(A_۱ - C) \cup (A_۲ - C) \cup \ldots \cup (A_k - C) \cup (A_{k+۱} - C) \overset{\text{شرکت پذیری}}{=}$$

$$\big((A_۱ - C) \cup (A_۲ - C) \cup \ldots \cup (A_k - C)\big) \cup (A_{k+۱} - C) \overset{\text{فرض استقراء}}{=}$$

$$\big((A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_k) - C\big) \cup (A_{k+۱} - C) \overset{\text{پایه استقراء}}{=}$$

$$\big((A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+۱}\big) - C \overset{\text{شرکت پذیری}}{=}$$

$$(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+۱}) - C$$

۱۱. گیریم A و B دو مجموعه هستند. ثابت کنید A و $B - A$ مجزا هستند و نیز $A \cup B = A \cup (B - A)$ (این نشان می دهد چگونه $A \cup B$ را به صورت اجتماع دو مجموعه ی مجزا می نویسیم).

جواب:

$$A \cap (B - A) \overset{\text{مثال ۵}}{=} A \cap (B \cap A') \overset{\text{جابجایی}}{=} A \cap (A' \cap B) \overset{\text{شرکت پذیری}}{=}$$

$$(A \cap A') \cap B \overset{\text{قضیه ۵}}{=} \emptyset \cap B = \emptyset$$

لذا دو مجموعه ی A و $B - A$ مجزایند. به علاوه داریم:

$$A \cup (B-A) \overset{\text{مثال ۵}}{=} A \cup \left(B \cap A'\right) = (A \cup B) \cap \left(A \cup A'\right) \overset{\text{قضیه ۵}}{=}$$

$$(A \cup B) \cap U = A \cup B$$

۱۳. مجموعه های A و B چه شرط هایی باید داشته باشند تا $A-B=B-A$ برقرار باشد؟

جواب: فرض کنیم $A-B=B-A$. طبق تمرین ۱۱ داریم:

$$A \cup B = A \cup (B-A) = A \cup (A-B) \overset{A-B \subseteq A}{=} A$$

لذا $A \cup B = A$. از تمرین ۱ بخش ۲. ۳ نتیجه می گیریم $B \subseteq A$ (۱). به طور مشابه می توان نشان داد $A \subseteq B$(۲). از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $A=B$.

بر عکس، اگر $A=B$، آنگاه $A-B=B-A=\emptyset$.

لذا می توان گفت: $A-B=B-A \iff A=B$

۱۴. گیریم A،B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید :

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$$

جواب:

$$(A-C)-(B-C) \overset{\text{مثال ۵}}{=} \left(A \cap C'\right)-\left(B \cap C'\right) \overset{\text{جابجایی}}{=}$$

$$\left(C' \cap A\right)-\left(C' \cap B\right) \overset{\text{مثال ۶}}{=} C' \cap (A-B) \overset{\text{جابجایی}}{=} (A-B) \cap C' \overset{\text{مثال ۵}}{=}$$

$$(A-B)-C$$

۱۵.گیریم A، B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید:

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C})$$

جواب:

$$A-(B\cup C)\ \overset{\text{دمورگن}}{=} A\cap (B\cup C)'\ = A\cap (B'\cap C')\ \overset{\text{شرکت پذیری}}{=}$$

$$(A\cap B')\cap C' = (A-B)\cap C' = (A-B)-C$$

۱۶. گیریم A و B دو مجموعه هستند. ثابت کنید $A\cap B' = \emptyset = A'\cap B$ اگر و تنها اگر $A = B$.

جواب: طبق مثال۵ داریم $A\cap B' = A-B$ و $B\cap A' = B-A$.

اگر $A = B$، آنگاه $A-B = B-A = \emptyset$ که همان مطلوب مساله است.

بر عکس، فرض کنیم $A\cap B' = \emptyset = B\cap A'$ در نتیجه $A-B = B-A = \emptyset$. از تمرین ۱۳ نتیجه می شود $A = B$ و حکم ثابت می شود.

۱۷. گیریم A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه ی X هستند. درستی یا نادرستی رابطه ی زیر را تحقیق کنید.

$$(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A})\cap(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{X}-(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})$$

جواب: رابطه ی فوق نادرست است. فرض کنیم $X = \{a,b,c,d\}$، $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$.

حال داریم:

$$(X-A)\cap(X-B) = \{b,c,d\}\cap\{a,c,d\} = \{c,d\} \qquad (۱)$$

$$X-(A\cap B) = X-\emptyset = X = \{a,b,c,d\} \qquad (۲)$$

با مقایسه ی (1) و (2) نتیجه می گیریم $X - (A \cap B) \neq (X - A) \cap (X - B)$

۲۳. با فرضهای مسئله ۲۲ ی بالا ،ثابت کنید:

الف) $A \oplus A' = U$.

ب) $A \oplus C = A$ اگر و تنها اگر $C = \emptyset$.

ج) $A \oplus C = \emptyset$ اگر و تنها اگر $C = A$.

د) اگر $A \oplus C = B \oplus C$، آنگاه $A = B$.

جواب: الف)

$$A \oplus A' \overset{\text{قضیه ۵}}{=} (A - A') \cup (A' - A) \overset{\text{مسئله ۲۱}}{=} (A \cup A') - (A \cap A') = U - \emptyset = U$$

ب) فرض کنیم $A \oplus C = A$. طبق تعریف داریم:

$$A \oplus C = (A - C) \cup (C - A) = A \overset{\text{مسئله۲۱}}{\Longrightarrow} (A \cup C) - (A \cap C) = A \quad (*)$$

ابتدا فرض کنیم $A \cap C \neq \emptyset$. بنابراین عنصری مانند $x \in A \cap C$ وجود دارد. لذا $x \notin (A \cup C) - (A \cap C)$. رابطه ی $(*)$ و تساوی قبل نتیجه می دهند $x \notin A$ که تناقض است.

بنابراین باید داشته باشیم $A \cap C = \emptyset$. در این صورت عبارت $(*)$ به صورت $A \cup C = A$ تبدیل می‌شود. به برهان خلف فرض کنیم $C \neq \emptyset$. در نتیجه عنصری مانند $c \in C$ وجود دارد. چون $A \cap C = \emptyset$ نتیجه می گیریم $c \notin A$ و این تناقض است زیرا $c \in A \cup C = A$. در نتیجه فرض خلف باطل است و $C = \emptyset$.

بر عکس ، اگر $C = \emptyset$، آنگاه با استفاده از مسئله ی **۲۲**، به راحتی می توان حکم را ثابت کرد.

ج) فرض کنیم $A\oplus C = \emptyset$. طبق تعریف داریم :

$$A\oplus C = (A - C) \cup (C - A) = \emptyset$$

بنابراین باید داشته باشیم $A - C = \emptyset$ و $C - A = \emptyset$ و این یعنی $A \cap C' = \emptyset = C \cap A'$. از تمرین **۱۶** نتیجه می شود $A = C$.

برعکس، اگر $A = C$، آنگاه

$$A\oplus C = A\oplus A = \emptyset$$

۲۴. با فرضهای مسئله ۲۲ی بالا، ثابت کنید:

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B)\oplus(A \cap C)$$

جواب: از سمت راست تساوی شروع می کنیم:

$$(A \cap B)\oplus(A \cap C) = ((A \cap B) \cup (A \cap C)) - ((A \cap B) \cap (A \cap C))$$

$$\overset{\text{پخش پذیری}}{=} (A \cap (B \cup C)) - ((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

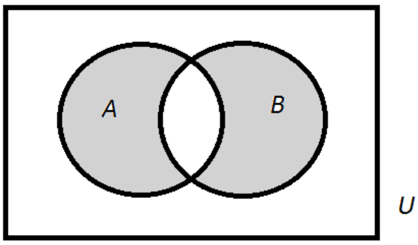
$$\overset{\text{جابجایی – خودتوانی}}{=} \big(A \cap (B \cup C)\big) - \big(A \cap (B \cap C)\big)$$

$$\overset{\text{مثال ۶}}{=} A \cap ((B \cup C) - (B \cap C)) \overset{\text{تعریف}}{=} A \cap (B \oplus C)$$

تمرین ۲. ۵- صفحه ی ۵۴.

۴. یک نمودار ون برای $A\oplus B$ رسم کنید.

جواب: می دانیم $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$. لذا نمودار ون $A \oplus B$ به صورت

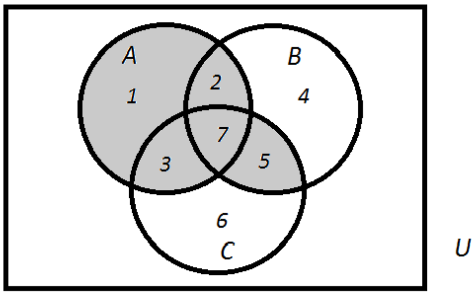


می باشد.

در مسائل ۵ تا ۱۳، نمودارهای ون رسم کرده و هر یک از رابطه ها را توجیه کنید.

۷. $\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

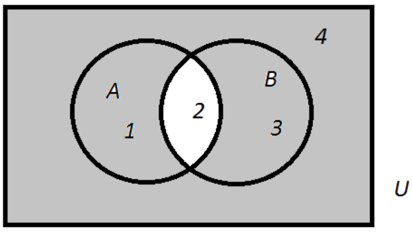
جواب: $B \cap C$ شامل سطوح **۵** و ۷ می باشد. لذا $A \cup (B \cap C)$ شامل سطوح **۱**، **۲**، **۳**، **۵** و ۷ می باشد. از طرفی $A \cup B$ شامل سطوح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷ و $A \cup C$ شامل سطوح **۱**، **۲**، **۳**، **۵**، **۶** و ۷ می باشد. بنابراین $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ از سطوح **۱**، **۲**، **۳**، **۵**و۷ تشکیل می شود که همان اجزای تشکیل دهنده ی $A \cup (B \cap C)$ می باشند.



۹. $\boldsymbol{(A \cap B)' = A' \cup B'}$

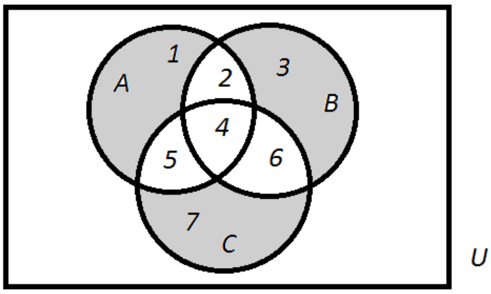
جواب: همانطور که در شکل ملاحظه می شود $A \cap B$ از سطح **۲** تشکیل شده است، لذا متمم آن متشکل از سطوح ۱، **۳** و**۴** می باشد. از طرفی A' از سطوح **۳** و **۴** و B' از سطوح **۱** و**۴**

تشکیل شده است. در نتیجه اجتماع آنها یعنی $A' \cup B'$ شامل سطوح ۱، ۳ و ۴ است که همان اجزای تشکیل دهنده ی $(A \cap B)'$ می باشند.



۱۲. $A\oplus (B \oplus C) = (A\oplus B)\oplus C$.

جواب: مجموعه ی $B\oplus C$ شامل سطوح ۲، ۳، ۵ و ۷ می باشد. مجموعه ی $A\oplus (B\oplus C)$ که از حذف سطوح مشترک A و $B\oplus C$ حاصل می شود، شامل سطوح ۱،۳ و ۷ می باشد.

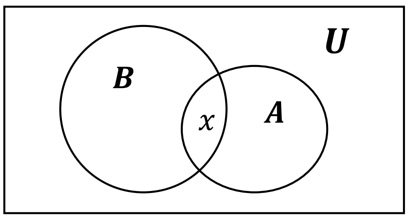


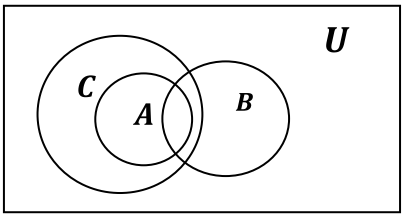
از طرفی $A \oplus B$ از سطوح ۱،۳،۵ و ۶ تشکیل شده است. لذا مجموعه ی $(A \oplus B)\oplus C$ که از حذف سطوح مشترک $(A\oplus B)$ و C حاصل می شود، شامل سطوح ۱،۳ و ۷ خواهد بود که همان اجزای تشکیل دهنده ی مجموعه ی $A\oplus (B \oplus C)$ می باشند. بنابراین تساوی $A\oplus (B\oplus C) = (A\oplus B)\oplus C$ توجیه پذیر است.

در مسائل ۱۴ تا ۲۰ برای اثبات نادرستی رابطه ها ی زیر از نمودار ون استفاده کنید.

۱۵. اگر $x \in A$ و $A \nsubseteq B$، آنگاه $x \notin B$.

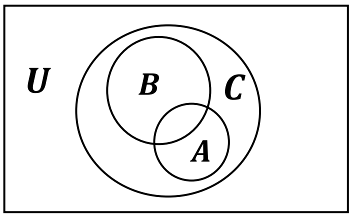
جواب: همانطور که ملاحظه می شود در شکل مقابل داریم $x \in A$ و $A \nsubseteq B$ ولی $x \in B$.





۱۶. اگر $A \nsubseteq B$ و $B \nsubseteq C$، آنگاه $A \nsubseteq C$.

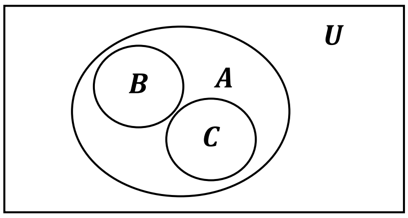
جواب: در شکل مقابل $A \nsubseteq B$ و $B \nsubseteq C$ ولی $A \subseteq C$.



۱۷. اگر $A \nsubseteq B$ و $B \subseteq C$، آنگاه $A \nsubseteq C$.

جواب: در شکل مقابل $A \nsubseteq B$ و $B \subseteq C$ ولی $A \subseteq C$.

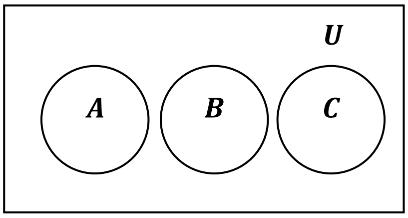
۱۸. الف) اگر $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$.



ب) اگر $A \cap B = A \cap C$، آنگاه $B = C$.

جواب:الف) در شکل مقابل ملاحظه می شود که

$A \cup B = A \cup C = A$ ولی $B \neq C$.

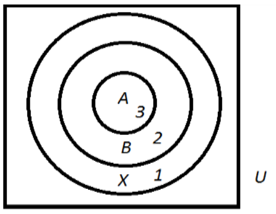


ب) در شکل مقابل ملاحظه می شود که

$A \cap B = A \cap C = \emptyset$ ولی $B \neq C$.

۱۹. اگر A و B زیر مجموعه های X باشند، آنگاه $(X - A) \cap (X - B) = X - (A \cap B)$.

جواب: در شکل زیر ملاحظه می شود که $X-(A\cap B)$ شامل سطوح ۱ و ۲ است، ولی $(X-A)\cap\ (X-B)$ فقط شامل سطح ۱ است.



۲۰. اگر $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ زیر مجموعه ی $\boldsymbol{X}$ باشند، آنگاه $\boldsymbol{(X-A)\cup\ (X-B)=X-(A\cup\ B)}$

جواب: نمودار ون تمرین قبل را در نظر بگیرید. ملاحظه می شود که $X-(A\ \cup B)$ فقط شامل سطح ۱ است در حالی که $(X-A)\cup\ (X-B)$ شامل سطوح ۱ و ۲ است.

تمرین ۲. ۶- صفحه ی ۵۹.

۵. قضیه ی ۸ (ب) را ثابت کنید: $\boldsymbol{(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)^{\prime}=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A^{\prime}_\gamma}$

جواب:

$$x\in(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)^{\prime}\overset{\text{تعریف}}{\equiv}\sim(x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\overset{\text{تعریف۷}}{\equiv}\sim(\forall\gamma\in\Gamma\ \ x\in A_\gamma)$$

$$\overset{\text{نقیض سور}}{\equiv}\exists\gamma\in\Gamma\ \ x\notin A_\gamma\overset{\text{تعریف}}{\equiv}\exists\gamma\in\Gamma\ \ x\in A^{\prime}_\gamma\overset{\text{تعریف۶}}{\equiv}x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A^{\prime}_\gamma$$

۷. مجموعه ی زیر را به صورت اجتماع چند اشتراک بنویسید.

الف) $\boldsymbol{(A_1\cup A_2)\cap\ (B_1\cup B_2\cup B_3)}$

و همچنین مجموعه ی زیر را به صورت اشتراک چند اجتماع بنویسید.

ب) $\boldsymbol{(A_1\cap A_2)\cup\ (B_1\cap B_2\cap B_3)}$

جواب: الف):

$$(A_۱ \cup A_۲) \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup B_۳) = (A_۱ \cup A_۲) \cap \left[\bigcup_{j=۱}^{۳} B_j\right] \overset{\text{قضیه ۹}}{=}$$

$$\bigcup_{j=۱}^{۳}[(A_۱ \cup A_۲) \cap B_j] \overset{\text{جابجایی}}{=} \bigcup_{j=۱}^{۳}[Bj \cap (A_۱ \cup A_۲)] =$$

$$\bigcup_{j=۱}^{۳}\left[B_j \cap \left(\bigcup_{i=۱}^{۲} A_i\right)\right] \overset{\text{قضیه ۹}}{=} \bigcup_{j=۱}^{۳}[\bigcup_{i=۱}^{۲}(B_j \cap A_i)] = \bigcup_{j=۱}^{۳}\bigcup_{i=۱}^{۲}[B_j \cap A_i]$$

۸. مجموعه های زیر را به صورت اجتماع اشتراک ها و اشتراک اجتماع ها بسط دهید. (مسئله ی ۷ را ببینید)

الف $[\cup_{i=1}^{m} A_i] \cap [\cup_{j=1}^{n} B_j]$

ب) $[\cap_{i=1}^{m} A_i] \cup [\cap_{j=1}^{n} B_j]$

$$\left[\bigcup_{i=۱}^{m} A_i\right] \cap \left[\bigcup_{j=۱}^{n} B_j\right] \overset{\text{قضیه ۹}}{=} \bigcup_{j=۱}^{n}\left[(\bigcup_{i=۱}^{m} A_i) \cap B_j\right]$$

$$\overset{\text{جابجایی}}{=} \bigcup_{j=۱}^{n}\left[B_j \cap \left(\bigcup_{i=۱}^{m} A_i\right)\right] \overset{\text{قضیه ۹}}{=} \bigcup_{j=۱}^{n}\left[\bigcup_{i=۱}^{m}(B_j \cap A_i)\right]$$

$$\overset{\text{شرکت پذیری}}{=} \bigcup_{j=۱}^{n}\bigcup_{i=۱}^{m}[B_j \cap A_i]$$

فصل سوم

رابطه و تابع

تمرین ۳. ۱- صفحه ی ۶۷.

۱. هر یک از مجموعه های زیر را با رسم یک نمودار در صفحه ی دکارتی به طور هندسی نمایش دهید.

الف) $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\}$

ب) $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \boldsymbol{x}>y\}$

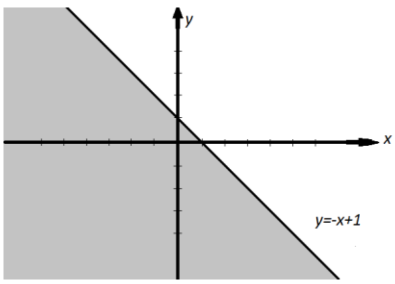
ج) $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leq \mathbf{1}\}$

جواب: نمودار مجموعه ی قسمت (ج) را رسم می کنیم. داریم:

$$\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |x+y|\leq ۱\}$$
$$=\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid -۱\leq x+y\leq ۱\}$$
$$=\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+y\leq ۱\}\cap\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid -۱\leq x+y\}$$

بنابراین دو مجموعه ی فوق را رسم نموده ، اشتراک آنها، مجموعه ی مورد نظر است. ابتدا مجموعه ی اول را رسم می کنیم:

$$\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+y\leq ۱\}=\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y\leq -x+۱\}$$



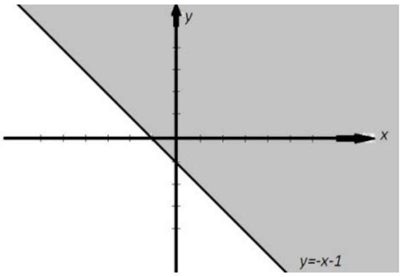
قسمت تیره رنگ،

نمودار $y\leq -x+۱$ است.

همچنین داریم:

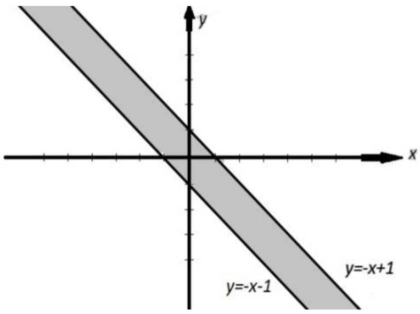
$$\{(x,y)\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -۱ \leq x+y\} = \{(x,y)\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq -x-۱\}$$

بنابراین مجموعه ی دوم را به صورت زیر رسم می کنیم:



قسمت تیره رنگ

نمودار $y \geq -x-۱$ است.



حال اشتراک دو نمودار فوق را روی یک نمودار رسم می کنیم:

همانطور که ملاحظه می شود، بخشی که بین دو نمودار $y=-x+۱$ و $y=-x-۱$ واقع شده است، $|x+y| \leq ۱$ می باشد.

۳. قضیه ی ۱ (ب) را ثابت کنید:

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C})$$

جواب:

$$(x,y) \in A \times (B \cup C) \overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \wedge \ (y \in B \cup C)$$

$$\overset{\text{تعریف اجتماع}}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \wedge (y \in B \ \vee \ y \in C)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{پخش پذیری}} (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف ۱}} (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times C$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

۴. ثابت کنید که $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

جواب: اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$، آنگاه طبق مثال **۲**، $A \times B = \emptyset$

برای اثبات عکس این مطلب، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم. بنابراین فرض کنیم $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$. در نتیجه مجموعه ی A، حداقل یک عضو مانند a و مجموعه ی B نیز حداقل یک عضو مانند b دارد. طبق تعریف حاصلضرب دکارتی، $(a, b) \in A \times B$ که نشان می دهد $A \times B \neq \emptyset$.

۵. ثابت کنید اگر A ، B و C مجموعه باشند و $A \subseteq B$ ، آنگاه $A \times C \subseteq B \times C$.

جواب: فرض کنیم $(a, c) \in A \times C$ دلخواه باشد. کافی است نشان دهیم $(a, b) \in B \times C$. طبق تعریف حاصلضرب دکارتی نتیجه می گیریم $a \in A \wedge c \in C$. از طرفی چون $A \subseteq B$ باید داشته باشیم $a \in B$. از $a \in B$ و $c \in C$ نتیجه می گیریم $(a, c) \in B \times C$ و حکم اثبات می شود.

۶. اگر مجموعه ی A ، m عنصر و مجموعه ی B ، n عنصر داشته باشد ، مجموعه ی $A \times B$ چند عنصر (جفت مرتب)دارد؟

جواب: داریم:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A , b \in B\}$$

چون مجموعه ی A دارای m عنصر است، برای مختص (مؤلفه) اول m حالت داریم. چون B دارای n عنصر است، برای مختص (مؤلفه) دوم، n حالت داریم . لذا طبق اصل ضرب در آنالیز ترکیبی، جمعاً mn حالت خواهیم داشت.

۸. درستی یا نادرستی (با آوردن یک مثال نقض) هر یک از حکم های زیر را ثابت کنید:

الف) $A \times B \subseteq C \times D$ اگر و تنها اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$.

ب) مجموعه ی توانی $A \times B$ ، یعنی $\mathcal{P}(A \times B)$ ، حاصلضرب دکارتی مجموعه های توانی $\mathcal{P}(A)$ و $\mathcal{P}(B)$ یعنی $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ است.

جواب: الف) نادرست است. مثال نقض زیر، این حکم را باطل می کند .

فرض کنیم $A = \emptyset$ ، $B = \{۱,۲\}$ ، $C = \{۱\}$ و $D = \{۲\}$. ملاحظه می شود که $A \times B = \emptyset$ و $C \times D = \{(۱,۲)\}$. در نتیجه $A \times B \subseteq C \times D$ ولی $B \nsubseteq D$.

ب) این حکم نیز نادرست است . اگر $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$ ، آنگاه $A \times B = \{(a,b)\}$. در نتیجه $\mathcal{P}(A \times B) = \{\emptyset, (a,b)\}$. از طرفی

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{b\}\}, \qquad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

لذا

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{b\}), (\{b\},\emptyset), (\{a\},\{b\})\}$$

ملاحظه می شود که حتی نوع عناصر دو مجموعه ی $\mathcal{P}(A \times B)$ و $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ با هم فرق دارد.

۱۱. ثابت کنید که اگر $A \times A = B \times B$ ، آنگاه $A = B$.

جواب: فرض کنیم $a \in A$ دلخواه باشد. طبق تعریف حاصلضرب دکارتی $(a,a) \in A \times A$.

از آنجایی که $A\times A=B\times B$ باید داشته باشیم $(a,a)\in B\times B$. طبق تعریف حاصلضرب دکارتی، $a\in B$ و $a\in B$. در نتیجه $a\in B$ و بنابراین $A\subseteq B$. به طور مشابه نشان می دهیم $B\subseteq A$. در نتیجه $A=B$.

۱۲. ثابت کنید که اگر $C\neq\emptyset$ و $A\times C=B\times C$، آنگاه $A=B$.

جواب: چون $C\neq\emptyset$، بنابراین C دارای حداقل یک عنصر می باشد که آن را $c_\circ$ می نامیم. نشان می دهیم $A\subseteq B$. فرض کنیم $a\in A$ دلخواه باشد. چون $c_\circ\in C$، طبق تعریف حاصلضرب دکارتی، $(a,c_\circ)\in A\times C$. از فرض $A\times C=B\times C$ نتیجه می گیریم $(a,c_\circ)\in B\times C$. بنابراین $a\in B$ و $c_\circ\in C$. در نتیجه $a\in B$. اثبات $B\subseteq A$ مشابه است. از $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ نتیجه می گیریم $A=B$.

۱۳. درستی یا نادرستی تساوی $A\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$ را بررسی کنید.

جواب: تساوی فوق نادرست است زیرا عناصر A، عضو مجموعه ی سمت چپ می باشند اما در مجموعه ی سمت راست نیستند. یعنی $A\subseteq A\cup(B\times C)$ ولی $A\not\subseteq(A\cup B)\times(A\cup C)$. (می توانید با معرفی سه مجموعه، مثال نقضی برای این مسئله بیاورید.)

۱۵. آیا تساوی $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$ صحیح است ؟

جواب: تساوی فوق نادرست است . قرار دهید:

$$D=\{۵,۶\},\qquad C=\{۳\},\qquad B=\emptyset,\qquad A=\{۱,۲\}$$

در نتیجه:

$$(A\times B)\cup(C\times D)=\emptyset\cup\{(۳,۵),(۳,۶)\}=\{(۳,۵),(۳,۶)\}$$

$$(A\cup C)\times(B\cup D)=\{۱,۲,۳\}\times\{۵,۶\}=$$

$$\{(۱,۵),(۱,۶),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۵),(۳,۶)\}$$

ملاحظه می شود که

$$(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

۱۶. ثابت کنید که اگر $A \cap B = \emptyset$ ، آنگاه برای هر مجموعه ی C و هر مجموعه ی D، $(A \times C) \cap (B \times D) = \emptyset$

جواب:

$$(A \times C) \cap (B \times D) \overset{\text{تمرین ۹}}{=} (A \cap B) \times (C \cap D) = \emptyset \times (C \cap D) = \emptyset$$

۱۷. فرض کنیم A، B, C و D مجموعه های نا تهی باشند. ثابت کنید $A \times B = C \times D$ اگر و فقط اگر $B = D$ و $A = C$.

جواب: اگر $A = C$ و $B = D$ ، آنگاه به وضوح $A \times B = C \times D$

برعکس، فرض کنیم $A \times B = C \times D$. نشان می دهیم $A = C$. اثبات $B = D$ مشابه است. فرض کنیم $a \in A$ دلخواه باشد. از آنجایی که $B \neq \emptyset$ نتیجه می گیریم $\exists b_\circ \in B$. طبق تعریف حاصلضرب دکارتی، $(a, b_\circ) \in A \times B$. از $A \times B = C \times D$ نتیجه می گیریم $(a, b_\circ) \in C \times D$. بنا بر تعریف حاصلضرب دکارتی $a \in C$ و $b_\circ \in D$ و در نتیجه $A \subseteq C$.

حال فرض کنیم $c \in C$ دلخواه باشد. از آنجایی که $D \neq \emptyset$ نتیجه می گیریم $\exists d_\circ \in D$. طبق تعریف حاصلضرب دکارتی $(c, d_\circ) \in C \times D$. چون $A \times B = C \times D$ باید داشته باشیم $(c, d_\circ) \in A \times B$. در نتیجه $c \in A$ و این یعنی $C \subseteq A$. از $A \subseteq C$ و $C \subseteq A$ نتیجه می گیریم $A = C$.

تذکر: در این حکم، شرط نا تهی بودن مجموعه ها لازم است زیرا اگر این شرط را حذف کنیم، حکم برقرار نیست . قرار دهید:

$$D = \{۵\}, \qquad C = \emptyset, \qquad B = \{۱,۲\}, \qquad A = \emptyset$$

ملاحظه می شود که $A \times B = C \times D$ اما $B \neq D$.

۱۸. ثابت کنید که

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}) = \big((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{B}\big) \cup (\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}))$$

جواب:

$$(x,y) \in (A \times B) - (C \times C) \quad \equiv (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \notin C \times C$$

$$\overset{\text{تعریف حاصلضرب دکارتی}}{\equiv} \qquad (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \notin C \vee y \notin C)$$

$$\overset{\text{پخش پذیری}}{\equiv} \qquad ((x \in A \wedge y \in B) \wedge x \notin C) \vee ((x \in A \wedge y \in B) \wedge y \notin C)$$

$$\overset{\text{شرکت پذیری}}{\equiv} \qquad [(x \in A \wedge x \notin C) \wedge y \in B)] \vee [(x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)]$$

$$\equiv \quad (x \in (A - C) \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in (B - C))$$

$$\overset{\text{تعریف حاصلضرب دکارتی}}{\equiv} \qquad (x,y) \in (A - C) \times B \vee (x,y) \in A \times (B - C)$$

$$\equiv \quad (x,y) \in [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$$

۲۰ . ثابت کنید که

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = \big((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{B}\big) \cup \big(\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{D})\big)$$

جواب:

$$(x,y) \in (A \times B) - (C \times D) \quad \equiv (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \notin C \times D$$

$$\equiv \quad (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \notin C \vee y \notin D)$$

پخش پذیری

$$\equiv \quad ((x \in A \wedge y \in B) \wedge x \notin C) \vee ((x \in A \wedge y \in B) \wedge y \notin D)$$

شرکت پذیری

$$\equiv \quad ((x \in A \wedge x \notin C) \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin D))$$

$$\equiv \quad (x \in (A - C) \wedge y \in B) \vee \big(x \in A \wedge (y \in (B - D)\big)$$

تعریف حاصلضرب دکارتی

$$\equiv \quad (x, y) \in \big((A - C) \times B\big) \vee (x, y) \in (A \times (B - D))$$

$$\equiv \quad (x, y) \in ((A - C) \times B) \cup (A \times (B - D))$$

تمرین ۳. ۲- صفحه ی ۷۱.

۲. گیریم $A = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{R} = \{(a, c), (c, b), (a, b)\}$. حوزه و نگاره ی $\mathcal{R}$ را بیابید.

جواب: $Dom\mathcal{R} = \{a, c\}$ و $Im\mathcal{R} = \{b, c\}$.

۴. گیریم $A = \{a, b, c\}$ و

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, a), (a, c)\}$$

ثابت کنید $\mathcal{R}$ منعکس و متقارن است ، اما متعدی نیست.

جواب: $\mathcal{R}$ منعکس است زیرا $(a, a) \in \mathcal{R}, (b, b) \in \mathcal{R}, (c, c) \in \mathcal{R}$. یعنی هر عضو A با خودش رابطه ی $\mathcal{R}$ دارد.

$\mathcal{R}$ متقارن است زیرا:

$(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}$

$(c,a) \in \mathcal{R} \ \wedge (a,c) \in \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ متعدی نیست، زیرا $(b,a) \in \mathcal{R}$ و $(a,c) \in \mathcal{R}$ ولی $(b,c) \notin \mathcal{R}$.

۵. رابطه ای مثال بیاورید که انعکاسی و متعدی باشد، اما متقارن نباشد.

جواب: فرض کنیم $X = \{a,b,c,d\}$. رابطه ی زیر را روی X در نظر بگیرید:

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\ ,(a,b)\ ,(b,c)\ ,(a,c)\ \}$$

این رابطه انعکاسی است، زیرا :

$(a,a) \in \mathcal{R}, (b,b) \in \mathcal{R}, (c,c) \in \mathcal{R}, (d,d) \in \mathcal{R}$

این رابطه متعدی است، زیرا :

$(a,b) \in \mathcal{R} \ \wedge (b,c) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (a,c) \in R$

این رابطه متقارن نیست ، زیرا $(a,b) \in \mathcal{R}$ ولی $(b,a) \notin \mathcal{R}$

۶. رابطه ای مثال بیاورید که متقارن و متعدی باشد، اما انعکاسی نباشد.

جواب: X را مجموعه ی تمرین قبل بگیرید . رابطه ی زیر را روی X تعریف می کنیم:

$$\mathcal{R} = \{(a,a)\ ,(b,b)\ ,(c,c)\ \}$$

این رابطه، انعکاسی نیست چون $(d,d) \notin \mathcal{R}$ ولی متقارن و متعدی می باشد.

۷. $\mathcal{R}$ رابطه ای در مجموعه ی X است . ثابت کنید که :

الف) $\mathcal{R}$ انعکاسی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R} \supseteq \Delta_X$.

ب) $\mathcal{R}$ متقارن است اگر و تنها اگر $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.

پ) $\mathcal{R}$ انعکاسی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}^{-1}$ انعکاسی باشد.

ت) $\mathcal{R}$ متقارن است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}^{-1}$ متقارن باشد.

ث) $\mathcal{R}$ متعدی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}^{-1}$ متعدی باشد.

ج) $\mathcal{R}$ یک رابطه ی هم ارزی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}^{-1}$ یک رابطه ی هم ارزی باشد.

جواب: الف)

$\mathcal{R}$ انعکاسی $\Leftrightarrow \ \forall x \in X \ (x,x) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(x,x) | x \in X\} \subseteq \mathcal{R} \Leftrightarrow \Delta_X \subseteq \mathcal{R}$

ب) فرض کنیم $\mathcal{R}$ متقارن باشد، بنابراین :

$$(a,b) \in \mathcal{R} \overset{\text{متقارن } \mathcal{R}}{\Longleftrightarrow} (b,a) \in \mathcal{R} \overset{\text{تعریف } \mathcal{R}^{-1}}{\Longleftrightarrow} (a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$$

لذا $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.

برعکس، فرض کنیم $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$، نشان می دهیم $\mathcal{R}$ متقارن است:

$$(a,b) \in \mathcal{R} \overset{\mathcal{R}=\mathcal{R}^{-1}}{\Longleftrightarrow} (a,b) \in \mathcal{R}^{-1} \overset{\text{تعریف } \mathcal{R}^{-1}}{\Longleftrightarrow} (b,a) \in \mathcal{R}$$

بنابر این $\mathcal{R}$ متقارن است .

پ) فرض کنیم $\mathcal{R}$ انعکاسی باشد. $x \in X$ را دلخواه می گیریم. چون $\mathcal{R}$ انعکاسی است $(x,x) \in \mathcal{R}$. بنابراین $(x,x) \in \mathcal{R}^{-1}$. در نتیجه $\mathcal{R}^{-1}$ انعکاسی است.

برعکس، فرض کنیم $\mathcal{R}^{-1}$ انعکاسی باشد. بنابر آنچه در بالا ثابت شد، $(\mathcal{R}^{-1})^{-1}$ انعکاسی است. از طرفی طبق تمرین ۱، $\mathcal{R} = (\mathcal{R}^{-1})^{-1}$. لذا $\mathcal{R}$ انعکاسی است.

ت) فرض کنیم $\mathcal{R}$ متقارن باشد. طبق قسمت (ب) ، داریم $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$. لذا $\mathcal{R}^{-1}$ نیز متقارن است.

برعکس، فرض کنیم $\mathcal{R}^{-1}$ متقارن باشد. طبق قسمت (ب) داریم $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}^{-1}$. از طرفی بنا بر تمرین (۱) همین بخش، $\mathcal{R} = (\mathcal{R}^{-1})^{-1}$، بنا براین $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$. طبق قسمت (ب)، $\mathcal{R}$ متقارن است.

ث) فرض کنیم $\mathcal{R}$ متعدی باشد. نشان می دهیم $\mathcal{R}^{-1}$ متعدی است:

$$if\ (x,y) \in \mathcal{R}^{-1} \wedge (y,z) \in \mathcal{R}^{-1} \overset{\text{تعریف } \mathcal{R}^{-1}}{\Longrightarrow} (y,x) \in \mathcal{R} \wedge (z,y) \in \mathcal{R}$$

$$\overset{\text{متعدی } \mathcal{R}}{\Longrightarrow} (z,x) \in \mathcal{R} \overset{\text{تعریف } \mathcal{R}^{-1}}{\Longrightarrow} (x,z) \in \mathcal{R}^{-1}$$

درنتیجه $\mathcal{R}^{-1}$ متعدی است.

برعکس، فرض کنیم $\mathcal{R}^{-1}$ متعدی باشد. نشان می دهیم $\mathcal{R}$ متعدی است:

$$if\ (x,y)\in\mathcal{R}\ \wedge(y,z)\in\mathcal{R}\xRightarrow{\text{تعریف } \mathcal{R}^{-1}}(y,x)\in\mathcal{R}^{-1}\wedge(z,y)\in\mathcal{R}^{-1}$$

$$\xRightarrow{\text{متعدی } \mathcal{R}}(z,x)\in\mathcal{R}^{-1}\xRightarrow{\text{تعریف } \mathcal{R}^{-1}}(x,z)\in\mathcal{R}$$

لذا $\mathcal{R}$ متعدی است.

ج) با تلفیق قسمت های (پ) ، (ت) و (ث) داریم: رابطه ی $\mathcal{R}$، انعکاسی ، متعدی و متقارن است اگر و تنها اگر رابطه ی $\mathcal{R}^{-1}$ انعکاسی ، متعدی و متقارن باشد. این گزاره، معادل است با گزاره ی $\mathcal{R}$ رابطه ی هم ارزی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}^{-1}$ رابطه ی هم ارزی باشد.

۸. چند رابطه روی یک مجموعه ی n عضوی وجود دارد؟

جواب: اگر مجموعه ی X دارای n عضو باشد، آنگاه $X\times X$ دارای n^2 عضو است. هر رابطه روی مجموعه ی X، زیر مجموعه ای از $X\times X$ است. چون $X\times X$ دارای 2^{n^2} زیر مجموعه می باشد، 2^{n^2} رابطه روی مجموعه ی X وجود دارد.

۹. چند رابطه از یک مجموعه ی m عضوی در یک مجموعه ی n عضوی وجود دارد ؟

جواب: هر رابطه از یک مجموعه ی A به مجموعه ی B، زیر مجموعه ای از $A\times B$ است. چون A دارای m عضو و B دارای n عضو است، $A\times B$ دارای mn عضو خواهد بود. در نتیجه ، تعداد زیر مجموعه های $A\times B$ برابر با 2^{mn} می باشد که همان تعداد رابطه ها از A به B است.

۱۰. فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه از A به B است و $D\subseteq A$. منظور از تحدید $\mathcal{R}$ به D، رابطه ی $\mathcal{R}|\,\mathrm{D}=\{(x,y)\in\mathcal{R}|\ x\in D\}$ از D به B است. ثابت کنید:

$$\boldsymbol{\mathcal{R}|\mathrm{D}=\mathcal{R}\cap(D\times Im(\mathcal{R}))}$$

جواب :

$$(x,y) \in \mathcal{R}|\,\mathrm{D} \overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in \mathcal{R} \wedge x \in D$$

$$\overset{\text{تعریف } \mathrm{Im}\mathcal{R}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in \mathcal{R} \wedge x \in D \wedge y \in Im\mathcal{R}$$

$$\overset{\text{تعریف حاصلضرب دکارتی}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (x,y) \in (D \times Im\mathcal{R})$$

$$\overset{\text{تعریف اشتراک}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in \mathcal{R} \cap (D \times Im\mathcal{R})$$

۱۱. ثابت کنید که اگر $\mathcal{R}$ یک رابطه از A به B و D و E زیر مجموعه های A باشند، آنگاه :

الف) $(\mathcal{R}|\,\mathbf{D} \cup \boldsymbol{E}) = (\mathcal{R}|\,\mathbf{D}) \cup (\mathcal{R}|\,\mathbf{E})$

ب) $(\mathcal{R}|\,\mathbf{D} \cap \boldsymbol{E}) = (\mathcal{R}|\,\mathbf{D}) \cap (\mathcal{R}|\,\mathbf{E})$

جواب: ب)

$$(x,y) \in (\mathcal{R}|\,\mathrm{D} \cap E) \overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (x \in D \cap E)$$

$$\overset{\text{تعریف اشتراک}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (x \in D \wedge x \in E)$$

$$\overset{\text{خودتوانی}}{\Longleftrightarrow} ((x,y) \in \mathcal{R} \wedge (x,y) \in \mathcal{R}) \wedge (x \in D \wedge x \in E)$$

$$\overset{\text{جابجایی–شرکت پذیری}}{\Longleftrightarrow} ((x,y) \in \mathcal{R} \wedge x \in D) \wedge ((x,y) \in \mathcal{R} \wedge x \in E)$$

$$\overset{\text{تعریف تحدید}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in (\mathcal{R}|\,D) \wedge (x,y) \in (\mathcal{R}|\,E) \overset{\text{تعریف اشتراک}}{\Longleftrightarrow}$$

$$(x,y) \in (\mathcal{R}|\,D) \cap (\mathcal{R}|\,E)$$

۱۲. فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه از A به B و X یک زیر مجموعه ی دلخواه A باشد. $\mathcal{R}(X)$، به نام $\mathcal{R}$ - نگاره ی X را چنین تعریف کنید:

$$\mathcal{R}(X) = \{y \in B | x \in X \text{ برای یک } (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

ثابت کنید که اگر D و E زیر مجموعه های A باشند، آنگاه

الف) $\mathcal{R}(D \cup E) = \mathcal{R}(D) \cup \mathcal{R}(E)$

ب) $\mathcal{R}(D \cap E) \subseteq \mathcal{R}(D) \cap \mathcal{R}(E)$

جواب: الف)

$$y \in \mathcal{R}(D \cup E) \xRightarrow{\text{تعریف}} \exists x\ s.t\ (x \in D \cup E) \wedge (x, y) \in \mathcal{R}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} \exists x\ s.t\ (x \in D \vee x \in E) \wedge (x, y) \in \mathcal{R}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{پخش پذیری}} \exists x\ s.t\ (x \in D \wedge (x, y) \in \mathcal{R}) \vee (x \in E \wedge (x, y) \in \mathcal{R})$$

$$\xRightarrow{\text{تعریف}} y \in \mathcal{R}(D) \vee y \in \mathcal{R}(E) \xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} y \in \mathcal{R}(D) \cup \mathcal{R}(E)$$

برعکس،

$$y \in \mathcal{R}(D) \cup \mathcal{R}(E) \xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} y \in \mathcal{R}(D) \vee y \in \mathcal{R}(E)$$

$$\xRightarrow{\text{تعریف}} (\exists x' \in D\ s.t\ (x'y) \in \mathcal{R}) \vee (\exists x'' \in E\ s.t\ (x'', y) \in \mathcal{R})$$

$$\Rightarrow (\exists x \in D \cup E\ \ s.t\ \ (x, y) \in \mathcal{R})$$

$$\xRightarrow{\text{تعریف}} y \in \mathcal{R}\ (D \cup E)$$

ب)

$$y \in \mathcal{R}(D \cap E) \overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} \exists x \ \ s.t \ \ (x \in D \cap E \ \wedge \ (x,y) \in \mathcal{R})$$

$$\xleftrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} \ \exists x \ s.t \ (x \in D \wedge x \in E) \wedge (x,y) \in \mathcal{R}$$

$$\xleftrightarrow{\text{خودتوانی}} \ \exists x \ \ s.t \ (x \in D \wedge x \in E) \wedge (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (x,y) \in \mathcal{R})$$

$$\xleftrightarrow{\text{شرکت پذیری-جابجایی}} \ \exists x \ \ s.t \ \ (x \in D \wedge (x,y) \in \mathcal{R}) \wedge (x \in E \wedge (x,y) \in \mathcal{R})$$

$$\xRightarrow{\text{تعریف}} y \in \mathcal{R}(D) \wedge y \in \mathcal{R}(E) \xleftrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} \ y \in \mathcal{R}(D) \cap \mathcal{R}(E)$$

تذکر: مثال زیر نشان می دهد که عکس رابطه ی (ب) برقرار نیست. یعنی

$$\mathcal{R}(D) \cap \mathcal{R}(E) \nsubseteq \mathcal{R}(D \cap E)$$

قرار می دهیم $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{۱,۲,۳\}$. رابطه ی $\mathcal{R}$ را از A به B به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{R} = \ \{(a,۱),(a,۲),(b,۲),(\ b,۳),(\ c,۱),(\ c,۳)\}$$

فرض کنیم $E = \{a,c\}$ و $D = \{b,c\}$. حال داریم:

$$\mathcal{R}(D) = \{۱,۲,۳\}, \qquad \mathcal{R}(E) = \{۱,۲,۳\} \ \Longrightarrow \mathcal{R}(D) \cap \mathcal{R}(E) = \{۱,۲,۳\}$$
$$\mathcal{R}(D \cap E) = \mathcal{R}(\{c\}) = \{۱,۳\}$$

همانطور که ملاحظه می شود $۲ \in \mathcal{R}(D) \cap \mathcal{R}(E)$ ولی $۲ \notin \mathcal{R}(D \cap E)$.

۱۳. با در نظر گرفتن فرض های مسئله ی ۱۲ ، ثابت کنید:

الف) $\boldsymbol{Dom(\mathcal{R}) = \ \mathcal{R}^{-1}(B)}$

ب) $\boldsymbol{Im(\mathcal{R}) = \mathcal{R}(A)}$

جواب: الف)

$$x \in Dom(\mathcal{R}) \xleftrightarrow{\text{تعریف دامنه}} \ \exists y \in B \ s.t \ (x,y) \in \mathcal{R}$$

$$\xleftrightarrow{\text{تعریف وارون رابطه}} \ \exists y \in B \ s.t \ (y,x) \in \mathcal{R}^{-۱}$$

$$\overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} \; x \in \mathcal{R}^{-1}(B)$$

ب)

$$y \in Im(\mathcal{R}) \overset{\text{تعریف نگاره}}{\Longleftrightarrow} \exists x \in A \;\; s.t \;\; (x,y) \in \mathcal{R} \overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} \; y \in \mathcal{R}(A)$$

۱۴. اگر $\mathcal{R}$ و $\mathcal{S}$ رابطه هایی از A به B باشند، آنگاه $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ یک رابطه از A به B است. ثابت کنید:

الف) $\boldsymbol{Dom(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = Dom\,(\mathcal{R}) \cup Dom(\mathcal{S})}$

ب) $\boldsymbol{Im(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = Im(\mathcal{R}) \cup Im(\mathcal{S})}$

پ)برای هر $\boldsymbol{X \subseteq A}$, $\quad \boldsymbol{(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})(X) = \mathcal{R}(X) \cup \mathcal{S}(X)}$

جواب: الف)

$$x \in Dom\,(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \overset{\text{تعریف دامنه}}{\Longleftrightarrow} \exists y \in B \;\; s.t \;\; (x,y) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

$$\overset{\text{تعریف اجتماع}}{\Longleftrightarrow} \; \exists y \in B \;\; s.t \;\; ((x,y) \in \mathcal{R} \vee (x,y) \in \mathcal{S}$$

$$\overset{\text{تعریف دامنه}}{\Longleftrightarrow} \; x \in Dom\,\mathcal{R} \;\vee x \in Dom\,\mathcal{S}$$

$$\overset{\text{تعریف اجتماع}}{\Longleftrightarrow} \; x \in Dom\,\mathcal{R} \;\cup\; Dom\,\mathcal{S}$$

ب)

$$y \in Im(\,\mathcal{R} \;\cup\; \mathcal{S}) \overset{\text{تعریف نگاره}}{\Longleftrightarrow} \; \exists x \in A \;\; s.t \;\; (x,y) \in (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})$$

$$\overset{\text{تعریف اجتماع}}{\Longleftrightarrow} \; \exists x \in A \;\; s.t \;\; ((x,y) \in \mathcal{R} \;\vee (x,y) \in \mathcal{S})$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف نگاره}} y \in Im\mathcal{R} \vee y \in Im\mathcal{S} \xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} y \in (Im\mathcal{R} \cup Im\mathcal{S})$$

پ)

$$y \in (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})(X) \xLeftrightarrow{\text{تعریف نگاره}} \exists x \in X \quad s.t \quad (x,y) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} \exists x \in X \quad s.t \quad (x,y) \in \mathcal{R} \vee (x,y) \in \mathcal{S})$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف نگاره}} y \in \mathcal{R}(X) \vee y \in \mathcal{S}(X) \xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} y \in \mathcal{R}(X) \cup \mathcal{S}(X)$$

۱۵. فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه روی X است. ثابت کنید $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ یک رابطه ی متقارن روی X است و اگر $\mathcal{S}$ یک رابطه ی متقارن روی X باشد که شامل $\mathcal{R}$ است، آنگاه $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$. بنا براین $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ کوچکترین رابطه ی متقارن شامل $\mathcal{R}$ است.

جواب: به وضوح $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$.

حال نشان می دهیم که $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ یک رابطه ی متقارن روی X است:

$$(x,y) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} (x,y) \in \mathcal{R} \vee (x,y) \in \mathcal{R}^{-1} \xLeftrightarrow{\text{تعریف وارون رابطه}}$$

$$(y,x) \in \mathcal{R}^{-1} \vee (y,x) \in \mathcal{R} \xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} (y,x) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$$

حال فرض کنیم $\mathcal{S}$ یک رابطه ی متقارن روی X و شامل $\mathcal{R}$ باشد، یعنی $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ (۱). در نتیجه $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{S}^{-1}$ و چون $\mathcal{S}$ متقارن است، بنا به تمرین (۷- ب) همین بخش، $\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}$. بنابراین $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{S}$ (۲). از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{S}$.

لذا $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ کوچکترین رابطه متقارن شامل $\mathcal{R}$ است.

۱۶. فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه روی X است. ثابت کنید $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ یک رابطه ی متقارن روی X است و اگر $\mathcal{S}$ یک رابطه ی متقارن روی X باشد به قسمی که $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ ، آنگاه $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$.بنابراین $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ بزرگترین رابطه ی متقارن مشمول$\mathcal{R}$ است.

جواب: به وضوح $\mathcal{R}$ شامل $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ می باشد.

ثابت می کنیم $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ یک رابطه ی متقارن روی X است:

$$(x,y) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \overset{\text{تعریف اشتراک}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (x,y) \in \mathcal{R}^{-1}$$

$$\overset{\text{تعریف وارون رابطه}}{\Longleftrightarrow} (y,x) \in \mathcal{R}^{-1} \wedge (y,x) \in \mathcal{R} \overset{\text{تعریف اشتراک}}{\Longleftrightarrow} (y,x) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$$

حال فرض کنیم $\mathcal{S}$ یک رابطه ی متقارن روی X باشد بطوریکه (۱) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$. در نتیجه (۲)$\mathcal{S}^{-1} \subseteq \mathcal{R}^{-1}$. چون $\mathcal{S}$ متقارن است (۳) $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$. از (۲) و (۳)نتیجه می گیریم (۴)$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}^{-1}$. از (۱) و (۴) می توان نتیجه گرفت $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$. بنابراین $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ بزرگترین رابطه ی متقارن مشمول $\mathcal{R}$ است.

۱۸. گیریم $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ رابطه ی ~ روی X را با $(a,b) \sim (c,d)$ اگر و تنها اگر $ad = bc$، تعریف کنید. ثابت کنید که رابطه ی ~ یک رابطه ی هم ارزی است.

جواب: این رابطه، انعکاسی است، زیرا :

$$\forall (a,b) \in X \ \ ab = ba \overset{\text{تعریف} \sim}{\Longrightarrow} \forall (a,b) \in X \quad (a,b) \sim (a,b)$$

متقارن است زیرا:

$$(a,b) \sim (c,d) \overset{\text{تعریف} \sim}{\Longleftrightarrow} ad = bc \Leftrightarrow cb = da \overset{\text{تعریف} \sim}{\Longleftrightarrow} (c,d) \sim (a,b)$$

متعدی است زیرا:

$$(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f) \overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} ad = bc \wedge cf = de$$
$$\Leftrightarrow adf = bcf \ \wedge bcf = bde \Rightarrow adf = bde$$
$$\overset{d \neq \circ}{\Longrightarrow} af = be \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$$

تمرین ۳. ۳- صفحه ی ۷۶.

۱. فرض کنید $\boldsymbol{X = \{a,b,c,d,e\}}$, $\boldsymbol{A = \{a,b\}}$ و $\boldsymbol{B = \{c,d,e\}}$

الف) تحقیق کنید که $\boldsymbol{\{A,B\}}$ یک افراز $\boldsymbol{X}$ است.

ب) رابطه ی $\boldsymbol{X/\{A,B\}}$ را که از افراز $\boldsymbol{\{A,B\}}$ پدید آمده است، بررسی کنید.

جواب: الف) از آنجایی که $A \neq B$ و $A \cap B = \emptyset$، شرط اول افراز برقرار است.

از طرفی داریم : $A \cup B = \{a,b\} \cup \{c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\} = X$

لذا شرط دوم هم برقرار است، در نتیجه $\{A,B\}$ یک افراز X است.

ب) رابطه ی هم ارزی $X/\{A,B\}$ که از افراز $\{A,B\}$ پدید می آید، به صورت زیر تعریف می شود:

$$x \frac{X}{\{A,B\}} x' \Leftrightarrow x,x' \in A \vee x,x' \in B$$

به عبارت دیگر، دو عنصر در مجموعه ی X، با هم رابطه ی $X/\{A,B\}$ دارند اگر و فقط اگر هر دو در A باشند یا هر دو در B باشند. مطابق این تعریف عناصری را که با هم رابطه دارند به صورت زیر مشخص می کنیم:

دو عنصر a و b رابطه ی $X/\{A,B\}$ دارند، زیرا $a,b \in A$. دو عنصر e و d نیز با هم رابطه ی $X/\{A,B\}$ دارند، زیرا $d,e \in B$. عنصر a با خودش رابطه ی $\left[\frac{X}{\{A,B\}}\right]$ دارد، زیرا $a,a \in A$. دو عنصر a و d با هم رابطه ی $\left[\frac{X}{\{A,B\}}\right]$ ندارند، زیرا $a \in A$ و $d \in B$. به همین صورت تمام عناصری را که با هم رابطه دارند مشخص می کنیم:

$$\frac{X}{\{A,B\}} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(e,e),(d,d),(a,b),(b,a),(c,d),\\ (d,c),(e,c),(c,e),(d,e),(e,d)\}$$

۲. فرض کنید $X = \{a,b,c,d\}$ و

$$\boldsymbol{\mathcal{R} = \{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b),(c,d),(d,c),(c,c),(d,d)\}}$$

الف) تحقیق کنید که $\mathcal{R}$ یک رابطه ی هم ارزی روی X است.

ب) افراز $X/\mathcal{R}$ را که از $\mathcal{R}$ پدید آمده است، بیابید.

جواب: الف) $\mathcal{R}$ انعکاسی است، زیرا :

$$\triangle_X = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\} \subseteq \mathcal{R}$$

$\mathcal{R}$ متقارن است، زیرا:

$$\mathcal{R}^{-۱} = \{(b,a),(a,b),(a,a),(b,b),(c,d),(d,c),(c,c),(d,d)\} = \mathcal{R}$$

$\mathcal{R}$ متعدی است، زیرا:

$$(a,b) \in \mathcal{R}, (b,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a,a) \in \mathcal{R}$$

$$(b,a) \in \mathcal{R}, (a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,b) \in \mathcal{R}$$

$$(c,d) \in \mathcal{R}, (d,c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (c,c) \in \mathcal{R}$$

$$(d,c) \in \mathcal{R}, (c,d) \in \mathcal{R} \Rightarrow (d,d) \in \mathcal{R}$$

ب)

$$\frac{a}{\mathcal{R}} = \{x \in X \mid a\,\mathcal{R}\,x\} = \{a, b\}$$

$$\frac{b}{\mathcal{R}} = \{x \in X \mid b\,\mathcal{R}\,x\} = \{a, b\}$$

$$\frac{c}{\mathcal{R}} = \{x \in X \mid c\,\mathcal{R}\,x\} = \{c, d\}$$

$$\frac{d}{\mathcal{R}} = \{x \in X \mid d\,\mathcal{R}\,x\} = \{c, d\}$$

در نتیجه:

$$\frac{X}{\mathcal{R}} = \left\{\frac{x}{\mathcal{R}} \mid x \in X\right\} = \left\{\frac{a}{\mathcal{R}}, \frac{b}{\mathcal{R}}, \frac{c}{\mathcal{R}}, \frac{d}{\mathcal{R}}\right\} = \big\{\{a, b\}, \{c, d\}\big\}$$

۳. فرض کنید $\mathcal{P}$ افراز $X/\mathcal{R}$ مسئله ی ۲ ی بالا باشد. رابطه ی $X/\mathcal{P}$ روی X را که از $\mathcal{P}$ پدید آمده است، بیابید.

جواب: داریم $X/\mathcal{R} = \mathcal{P} = \big\{\{a, b\}, \{c, d\}\big\}$. این افراز یک رابطه ی هم ارزی روی X پدید می آورد که تحت آن دو عضو X با هم رابطه دارند اگر و فقط اگرهر دو عضو متعلق به $\{a, b\}$ یا متعلق به $\{c, d\}$ باشند. لذا رابطه ی پدید آمده به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{X}{\mathcal{P}} = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a), (c, c), (d, d,), (c, d), (d, c)\}$$

مشاهده می شود که این رابطه، همان رابطه ی هم ارزی $\mathcal{R}$ در تمرین ۲ می باشد.

۶. X را یک مجموعه ی متناهی و $\mathcal{P}$ ، افراز X را $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ بگیرید و فرض کنید مجموعه ی A_j ,$j = 1, 2, \dots, k$, n_j عضو دارد. ثابت کنید که تعداد جفت های مرتب در رابطه ی هم ارزی $X/\mathcal{P}$ دقیقاً $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2$ است.

جواب: از تمرین ۴ می دانیم $X/\mathcal{P} = \bigcup_{i=۱}^{k}(A_i \times A_i)$. همچنین تعداد عناصر $A_i \times A_i$ طبق تمرین ۶، بخش ۱.۳، $n_i^۲$ است. از طرفی مجموعه های $A_i \times A_i$ برای هر $۱ \leq i \leq k$ مجزا می باشند، زیرا اگر غیر از این باشد به تناقض می رسیم. فرض کنیم این مجموعه ها مجزا نباشند (فرض خلف). بنابراین:

$$\exists k', k'' \in \{۱,۲, \dots, k\}, k' \neq k''\ s.t\ (A_{k'} \times A_{k'}) \cap \left(A_{k''} \times A_{k''}\right) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists (x,y) \in (A_{k'} \times A_{k'}) \cap \left(A_{k''} \times A_{k''}\right) \Rightarrow x, y \in A_{k'} \wedge x, y \in A_{k''}$$

و این تناقض است، زیرا A_i ها اعضای افراز بودند و طبق تعریف، مجزا هستند و اشترا ک ندارند. حال داریم :

$$n(X/\mathcal{P}) = n\left(\bigcup_{i=۱}^{k}(A_i \times A_i)\right)$$
$$= \sum_{i=۱}^{k} n(A_i \times A_i) = \sum_{i=۱}^{k} n_i^۲ = n_۱^۲ + n_۲^۲ + \cdots + n_k^۲$$

۸. مثال ۶ را به ازای $m = 3$ بررسی کنید.

جواب: در مثال ۶ قرار می دهیم $m = ۳$. بنابراین باید نشان دهیم $\mathcal{P} = \{\mathbb{Z}_۰, \mathbb{Z}_۱, \mathbb{Z}_۲\}$ افرازی از $\mathbb{Z}$ است. داریم:

$$\mathbb{Z}_۰ = \{x \in \mathbb{Z} | x - ۰ = ۳k, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} | x = ۳k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z}_۱ = \{x \in \mathbb{Z} | x - ۱ = ۳k, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} | x = ۳k + ۱, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z}_۲ = \{x \in \mathbb{Z} | x - ۲ = ۳k, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} | x = ۳k + ۲, k \in \mathbb{Z}\}$$

ابتدا ثابت می کنیم که این مجموعه ها مجزا می باشند. نشان می دهیم $\mathbb{Z}_۰ \cap \mathbb{Z}_۱ = \emptyset$. اثبات بقیه ی حالات مشابه است. به برهان خلف فرض کنیم $\mathbb{Z}_۰ \cap \mathbb{Z}_۱ \neq \emptyset$. بنابراین:

$$\exists y \in (\mathbb{Z}_۰ \cap \mathbb{Z}_۱) \Rightarrow \exists k,k' \in \mathbb{Z} \quad s.t \quad y = ۳k \wedge y = ۳k' + ۱$$

$$\Rightarrow ۳k = ۳k' + ۱ \Rightarrow ۳(k-k') = ۱ \xRightarrow{k-k' \in \mathbb{Z}} ۳|۱$$

و این تناقض است زیرا۳، عدد ۱ را عاد نمی کند.

اگر نشان دهیم $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_۰ \cup \mathbb{Z}_۱ \cup \mathbb{Z}_۲$ اثبات کامل می شود. به وضوح $(\mathbb{Z}_۰ \cup \mathbb{Z}_۱ \cup \mathbb{Z}_۲) \subseteq \mathbb{Z}$. باید نشان دهیم $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_۰ \cup \mathbb{Z}_۱ \cup \mathbb{Z}_۲$. فرض کنیم $x \in \mathbb{Z}$ دلخواه باشد. بنابر الگوریتم تقسیم :

$$\exists q,r \in \mathbb{Z} \quad s.t \quad x = ۳q + r, \qquad ۰ \le r < ۳$$

$$\Longrightarrow x \in \mathbb{Z}_۰ \;\vee\; x \in \mathbb{Z}_۱ \;\vee\; x \in \mathbb{Z}_۲ \Longrightarrow x \in \mathbb{Z}_۰ \cup \mathbb{Z}_۱ \cup \mathbb{Z}_۲$$

در نتیجه $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_۰ \cup \mathbb{Z}_۱ \cup \mathbb{Z}_۲$. از بحث فوق، نتیجه می گیریم $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_۰ \cup \mathbb{Z}_۱ \cup \mathbb{Z}_۲$.

۹. X را $\mathbb{Z}$، مجموعه ی اعداد صحیح بگیرید. فرض کنید رابطه ی ε روی X با $x\,\varepsilon\, y$ اگر و تنها اگر $x - y = 5k$ ، که درآن k یک عد صحیح است، تعریف شده است .

الف) ثابت کنید رابطه ی ε یک رابطه ی هم ارزی روی X است.

ب) X/ε، افراز X را پیدا کنید.

ج) تحقیق که رابطه ی هم ارزی $X/(X/\varepsilon)$ در واقع همان رابطه ی هم ارزی ε است.

جواب: الف) باید نشان دهیم این رابطه، انعکاسی ، متقارن و متعدی است:

انعکاسی : $\forall x \in X \quad x - x = ۰ = ۵ \times ۰ \Longrightarrow \forall x \in X \quad x\,\varepsilon\, x$

متقارن : $if\ x\,\varepsilon\, y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad s.t \ x - y = ۵k \Longrightarrow\ y - x = ۵(-k)$

$$\xrightarrow{-k=k'\in\mathbb{Z}} y - x = ۵k' \Rightarrow y\,\varepsilon\, x$$

متعدی : $if\ x\,\varepsilon\, y\ \wedge y\,\varepsilon\, x\ \Rightarrow \exists k,k' \in \mathbb{Z}\quad s.t\ x - y = ۵k' \wedge$

$$y - z = ۵k \Longrightarrow (x-y) + (y-z) = ۵k' + ۵k$$

$$\Longrightarrow x - z = ۵(k+k') \xrightarrow{k+k'=k''\in\mathbb{Z}} x - z = ۵k'' \Longrightarrow x\,\varepsilon\, z$$

ب) توجه کنید که اگر $x \in \mathbb{Z}$ دلخواه باشد ، طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$\exists q,r \in \mathbb{Z}\quad s.t\quad x = ۵q + r\quad ۰ \le r < ۵ \Longrightarrow x - r = ۵q$$

$$\Longrightarrow x\,\varepsilon\, r \Rightarrow [x] = [r]$$

پس کلاس های هم ارزی این رابطه ی هم ارزی حداکثر ۵ تا می باشند که در زیر آورده ایم:

$$[۰] = \{y \in \mathbb{Z} \mid y - ۰ = ۵k\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = ۵k\} = \mathbb{Z}_۰$$

$$[۱] = \{y \in \mathbb{Z} \mid y - ۱ = ۵k\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = ۵k + ۱\} = \mathbb{Z}_۱$$

$$[۲] = \{y \in \mathbb{Z} \mid y - ۲ = ۵k\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = ۵k + ۲\} = \mathbb{Z}_۲$$

$$[۳] = \{y \in \mathbb{Z} \mid y - ۳ = ۵k\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = ۵k + ۳\} = \mathbb{Z}_۳$$

$$[۴] = \{y \in \mathbb{Z} \mid y - ۴ = ۵k\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = ۵k + ۴\} = \mathbb{Z}_۴$$

مشابه تمرین قبل نشان داده می شود که این کلاسها اشتراک ندارند. از طرفی داریم $\bigcup_{i=۱}^{۴} \mathbb{Z}_i =$ $\mathbb{Z}$ (زیرا نشان دادیم هر $x \in \mathbb{Z}$ در یکی از این کلاس ها قرار دارد، یعنی $Z \subseteq \bigcup_{i=۱}^{۴} Z_i$. همچنین $\bigcup_{i=۱}^{۴} \mathbb{Z}_i \subseteq \mathbb{Z}$ ، زیرا هر $\mathbb{Z}_i$ زیر مجموعه ی $\mathbb{Z}$ است. بنا براین $\mathbb{Z} = \bigcup_{i=۱}^{۴} \mathbb{Z}_i$).

در نتیجه: $$X/\varepsilon = \{\mathbb{Z}_۰, \mathbb{Z}_۱, \mathbb{Z}_۲, \mathbb{Z}_۳, \mathbb{Z}_۴\}$$

ج) برای اینکه نشان دهیم $X/(X/\varepsilon)$ همان رابطه ی هم ارزی ε است، کافی است ثابت کنیم:

$$\forall a,b \in X=\mathbb{Z} \quad a[X/(X/\varepsilon)]\, b \Leftrightarrow a\, \varepsilon\, b$$

(یعنی a و b تحت $X/(X/\varepsilon)$ با هم رابطه دارند اگر وفقط اگر تحت ε با هم رابطه داشته باشند).

$$a \frac{X}{\frac{X}{\varepsilon}}\, b \xLeftrightarrow{\text{طبق تعریف}} \exists\, ۰ \le i \le ۴ \quad s.t \quad a,b \in \mathbb{Z}_i$$

$$\Rightarrow \exists k,k' \in \mathbb{Z},\ \exists\, ۰ \le i \le ۴ \ \ s.t \quad a-i=۵k \quad \wedge\ b-i=۵k'$$

$$\Rightarrow a-b=۵(k-k') \Rightarrow a\,\varepsilon\,\mathrm{b}$$

برعکس،

$$\text{if } a\ \ \varepsilon\, b \xLeftrightarrow{\text{قضیه۳-ج}} \exists\, ۰ \le i \le ۴ \quad s.t\ [a]=[b]=\mathbb{Z}_i \Rightarrow$$

$$\exists \le i \le ۴ \quad s.t \quad a,b \in \mathbb{Z}_i \Rightarrow a \frac{X}{(\frac{X}{\varepsilon})}\, b$$

۱۰. فرض کنید $\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$ یک افراز مجموعه ی A و $\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$ یک افراز مجموعه ی B است.ثابت کنید:

$$\{\, \boldsymbol{A_i \times B_j \mid i=1,2,\ldots,m\,;j=1,2,\ldots,n} \}$$

یک افراز $A\times B$ است.

جواب: برای اثبات اینکه مجموعه ی $\{\, A_i \times B_j \mid ۱ \le\ i \le m\,;\, ۱ \le j \le n\}$ یک افراز $A\times B$ است، دو مطلب را ثابت می کنیم. ابتدا ثابت می کنیم این مجموعه ها دو به دو مجزا هستند و سپس اینکه اجتماع آنها برابر با $A\times B$ است. برای اثبات حکم اول به برهان خلف فرض کنیم :

$$(A_i \times B_j) \cap (A_{i'} \times B_{j'}) \neq \emptyset$$

که در آن $i \neq i'$ یا $j \neq j'$. بنابراین:

$$\exists (a,b) \in (A_i \times B_j) \cap (A_{i'} \times B_{j'}) \Longrightarrow (a,b) \in A_i \times B_j \wedge$$
$$(a,b) \in A_{i'} \times B_{j'}$$

بدون آنکه از کلیت اثبات کاسته شود، فرض کنیم $i \neq i'$، بنابراین $A_i \cap A_{i'}$ (چون اعضای یک افراز می باشند). اما $a \in A_i \cap A_{i'}$ که این تناقض است . در نتیجه فرض خلف باطل است ومجموعه ی $\{ A_i \times B_j \mid ۱ \leq i \leq m ; ۱ \leq j \leq n\}$ از عناصر مجزا تشکیل شده اند. حال نشان می دهیم $\bigcup_{i=۱}^{m} \bigcup_{j=۱}^{n} A_i \times B_j = A \times B$. برای هر $۱ \leq i \leq m$ وهر $۱ \leq j \leq n$ داریم $A_i \times B_j \subseteq A \times B$. لذا $\bigcup_{i=۱}^{m} \bigcup_{j=۱}^{n} A_i \times B_j \subseteq A \times B (۱)$. از طرفی فرض کنیم $(x,y) \in A \times B$، در نتیجه $x \in A$ و $y \in B$. از اینکه $A = \bigcup_{i=۱}^{m} A_i$ و $B = \bigcup_{j=۱}^{n} B_j$، نتیجه می گیریم:

$$\exists ۱ \leq i_{\circ} \leq m \wedge ۱ \leq j_{\circ} \leq n \quad s.t \quad x \in A_{i_{\circ}} \wedge y \in B_{j_{\circ}}$$

لذا $(x,y) \in A_{i_{\circ}} \times B_{j_{\circ}}$ و این یعنی $(x,y) \in \bigcup_{i=۱}^{m} \bigcup_{j=۱}^{n} A_i \times B_j$. نشان دادیم $A \times B \subseteq \bigcup_{i=۱}^{m} \bigcup_{j=۱}^{n} A_i \times B_j \ (۲)$.

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $A \times B = \bigcup_{i=۱}^{m} \bigcup_{j=۱}^{n} A_i \times B_j$

تمرین ۳. ۴- صفحه ی ۸۲.

۷. گیریم $X \subseteq Y$ و $f = \{(x,x) \mid x \in X\}$. ثابت کنید $f: X \to Y$ یک تابع است. (تذکر. این تابع را *تابع شمولی* می گویند و می توان آن را با $f: X \subseteq Y$ نشان داد.)

جواب: فرض کنیم $x \in X$ دلخواه باشد. طبق تعریف f داریم $(x,x) \in f$. درنتیجه $x \in Domf$ و این یعنی $Domf = X$ (شرط(الف)تابع برقراراست).

اثبات شرط (ب):

$$if\ \ (x, y_1) \in f\ \wedge (x, y_2) \in f \xrightarrow{\text{طبق تعریف } f} x = y_1\ \wedge x = y_2\ \Rightarrow y_1 = y_2$$

درنتیجه شرط (ب) نیزبرقراراست و f تابع است.

۱۱. اگر $X = \{x, y, z\}$ و $Y = \{1, 2\}$، چندتابع از X به Y وجوددارد؟ درحالت کلیتر، اگر مجموعه ی X، m عنصر و مجموعه ی Y، n عنصرداشته باشد، چندتابع از X به Y وجوددارد؟

جواب: عمل تعریف تابع از X به Y از سه عمل مستقل تشکیل شده است. اولین عمل، این است که به عنصر x در X یک عنصر از Y نسبت دهیم واین، به دو طریق امکان پذیراست. عمل دوم، این است که به عنصر y در X یک عنصراز Y نسبت دهیم که این نیز به دوطریق امکان پذیر است. عنصر z در X را نیز به دو طریق می توان به عنصری از Y نظیرکرد. لذا بنا به اصل ضرب در آنالیز ترکیبی، $۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۳$ حالت برای تعریف یک تابع از X به Y وجود دارد.

اگرمجموعه ی X دارای m عنصر و مجموعه ی Y دارای n عنصرباشد، با استدلالی مشابه n^m حالت برای تعریف تابع وجود دارد .

۱۲. چندتابع ازتوابع مسئله ی ۱۱، توابع ثابت هستند.

جواب: اگرمجموعه ی X دارای m عنصر و مجموعه ی Y دارای n عنصرباشد، آنگاه برای تعریف توابع ثابت از X به Y، n حالت داریم زیرا در هرحالت باید همه ی عناصر X به یک و فقط یک عنصر از Y نظیرشوند. چون Y، n عنصر دارد، لذا n حالت بیشتر نخواهیم داشت.

۱۳. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع و A یک زیر مجموعه ی ناتهی X است. ثابت کنید که $f|A : A \to Y$ تحدید تابع $f: X \to Y$، یک تابع است. (برای تعریف «تحدید» مسئله ی ۱۰، تمرین ۳. ۲ را ببینید.)

جواب: تحدید یک تابع ، یعنی کوچک کردن دامنه ی آن. اگر $f: X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه تحدید f به A را به صورت $f|A = \{(x,y) \in f|\ \ x \in A\}$ تعریف می کنیم. بر ای اثبات اینکه $f: X \to Y$ یک تابع است ، دو مطلب را باید ثابت کنیم:

$$Dom\ (f|A)\ = A \qquad (۱)$$

$$if (x, y_۱) \in f|A\ \wedge (x, y_۲) \in f|A \Longrightarrow y_۱\ = y_۲ \quad (۲)$$

اثبات (۱): به وضوح $Dom\ (f|A)\ \subseteq A\ (*)$. فرض کنیم $x \in A$ دلخواه باشد. چون $A \subseteq X$، پس $x \in X$. از $Domf\ = X$ نتیجه می گیریم $x \in Dom\ f$ و این یعنی:

$$\exists y \in Y\ \ s.t\ \ (x,y) \in f \overset{x\in A}{\Longrightarrow} (x,y) \in f|A\ \ \Rightarrow x \in\ \ Dom\ (f|A)$$

بنابراین $A \subseteq Dom\ (f|A) (**)$. از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می گیریم $Dom\ (f|A)\ \ = A$.

اثبات (۲):

$$(x, y_۱) \in f\big|A \wedge (x, y_۲) \in f\big|A \overset{f|A\subseteq f}{\Longrightarrow} (x, y_۱) \in f \wedge (x, y_۲) \in f$$

$$\overset{f\text{تابع است}}{\Longrightarrow} y_۱\ = y_۲$$

۱۴. تابع $f: X \to Y$ مفروض است. ثابت کنید که هر زیر مجموعه ی f، مانند g نیز یک تابع است.

جواب: فرض کنیم $g \subseteq f$ و $(x, y_۱) \in g \wedge (x, y_۲) \in g$. از فرض $g \subseteq f$ نتیجه می گیریم $(x, y_۱) \in f \wedge (x, y_۲) \in f$. طبق فرض، f تابع است، بنابراین $y_۱ = y_۲$ و این یعنی g تابع است.

۱۵. فرض کنید $f: X \to X$ یک تابع از X به X و همچنین یک رابطه ی

انعکاسی روی X است. ثابت کنید که در این صورت f تابع همانی $I_X: X \to X$ است.

جواب: تابع همانی $I_X: X \to X$، تابعی است که به هر عنصر $x \in X$ خودش را نظیر می کند، یعنی $\forall x \in X \quad I_X(x) = x$. همین گزاره را برای f ثابت می کنیم. یعنی نشان می دهیم $\forall x \in X \ f(x) = x$. فرض کنیم $x \in X$ دلخوه باشد. از آنجائیکه f انعکاس است، نتیجه می گیریم $(x, x) \in f$. حال فرض کنیم $(x, y) \in f$ (یعنی x به عنصر دیگری مانند y نظیر شده باشد) . چون f تابع است، باید داشته باشیم $y = x$. بنابراین f به هر عنصر $x \in X$ دقیقاً خودش را نظیر می کند. یعنی $\forall x \in X \ f(x) = x$. لذا $f = I_X$.

۱۶. فرض کنید X فاصله ی یکه ی $[0, 1]$ است. یک تابع $f: X \to X$ بیابید که یک رابطه ی متقارن روی X باشد.

جواب: f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f = \{(x, ۱ - x) |\ x \in [۰,۱]\}$$

(به طور معادل $f: [۰,۱] \to [۰,۱]$ با ضابطه ی $f(x) = ۱ - x$). نشان می دهیم f یک تابع است. اگر $۰ \le x \le ۱$، آنگاه $-۱ \le -x \le ۰$ و این نتیجه می دهد $۰ \le ۱ - x \le ۱$. بنابراین برای هر $x \in [۰,۱]$ داریم $۱ - x \in [۰,۱]$. درنتیجه $Dom\, f = [۰,۱]$. از طرفی :

$$if\ x_۱ = x_۲ \implies -x_۱ = -x_۲ \implies ۱ - x_۱ = ۱ - x_۲ \implies f(x_۱) = f(x_۲)$$

این تابع متقارن است زیرا اگر $(x_۱, ۱ - x_۱) \in f$، آنگاه چون هر عنصر f به شکل $(x, ۱ - x)$ هایی است که $x \in [۰,۱]$، نتیجه می گیریم که $(۱ - x_۱, ۱ - (۱ - x_۱)) \in f$ (چون $۱ - x_۱ \in [۰,۱]$، لذا می توان قرار داد $x = ۱ - x_۱$). بنابراین $(۱ - x_۱, x_۱) \in f$ که نشان می دهد f متقارن است.

تابع $f = \{(x, x) |\ x \in [۰,۱]\}$ (تابع همانی) نیز یک رابطه ی متقارن روی X است.

۱۷. فرض کنید که دو تابع $f: X \to Y$ و $g: X \to Y$ یک حوزه و یک برد دارند. ثابت کنید که اگر $f \subseteq g$، آنگاه $f = g$.

جواب: کافی است نشان دهیم $g \subseteq f$. فرض کنیم $(x, y) \in g$ دلخواه باشد. در نتیجه $x \in Domg$ و $y \in Img$. از آنجایی که f و g یک حوزه و یک برد دارند، لذا $x \in Domf$. در نتیجه عنصری مانند $y' \in Y$ وجود دارد به طوری که (*) $(x, y') \in f$.
از فرض $f \subseteq g$ نتیجه می گیریم $(x, y') \in g$ چون g تابع است، $(x, y) \in g$ و $(x, y') \in g$ نتیجه می دهد $y = y'$. تساوی قبل و رابطه ی (*) نشان می دهد $(x, y) \in f$ و حکم ثابت می شود. (توجه کنید که در این تمرین، منظوراز برد، همان نگاره می باشد.)

تمرین ۳. ۵- صفحه ی ۸۷.

۵. گیریم $f: X \to Y$ یک تابع، $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ هستند . مثال هایی بیاورید که نشان دهد حکم های زیر دروغ می باشند.

الف) اگر $B \neq \emptyset$، آنگاه $f^{-1}(B) \neq \emptyset$.

ب) $f^{-1}(f(A)) = A$

ج) $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$

د) $f(X) = Y$

جواب: الف) فرض کنیم $X = \{a, b, c\}$ و $Y = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ تابع $f = \{(a, ۱), (b, ۲), (c, ۳)\}$ را در نظر بگیرید. مشاهده می شود که $f^{-۱}(\{۵\}) = \emptyset$ (زیرا هیچ عنصری از X به ۵ نظیر نشده است) در حالی که $\{۵\} \neq \emptyset$ ، لذا این حکم دروغ است.

ب) X و Y را مشابه قسمت (الف) در نظر می گیریم. تابع f را به صورت $f = \{(a, ۲), (b, ۲), (c, ۳)\}$ تعریف می کنیم . فرض کنیم $A = \{a\} \subseteq X$ داریم :

$$f(A) = f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{۲\} \Rightarrow f^{-۱}\big(f(A)\big) = f^{-۱}(\{۲\}) = \{a, b\}$$

در نتیجه $f^{-۱}\big(f(A)\big) \neq A$ (هر تابعی که یک به یک نباشد، این حکم را نقض می کند).

ج) X و Y را همانند قسمت قبل بگیرید . تابع f را به صورت $f = \{(a, ۲), (b, ۳), (c, ۱)\}$ در نظر می گیریم . فرض کنیم $B = \{۳,۵\} \subseteq Y$. داریم:

$$f^{-۱}(B) = f^{-۱}(\{۳,۵\}) = \{b\} \Rightarrow f\big(f^{-۱}(B)\big) = f(\{b\}) = \{۳\}$$

ملاحظه می شود که $f(f^{-۱}(B)) \neq B$.

د) تابع قسمت (ج) را در نظر می گیریم. داریم:

$$f(X) = \{f(x) | \, x \in X\} = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{۲,۳,۱\} \neq Y$$

۶. ثابت کنید که اگر $f(X) = Y$، مسئله ی ۵ (ج) راست است.

جواب: فرض کنیم $f(X) = Y$. در مسئله ی (۴-ب) ثابت شد $f(f^{-۱}(B)) \subseteq B$، بنابراین کافی است نشان دهیم $B \subseteq f(f^{-۱}(B))$.

$$y \in B \overset{B \subseteq Y}{\Longrightarrow} y \in Y \overset{f(X)=Y}{\Longrightarrow} \exists x \in X \; s.t \;\; f(x) = y \Longrightarrow$$

$$\exists x \in X \quad s.t \;\; x \in f^{-۱}(y) \xrightarrow{f^{-۱}(y) \subseteq f^{-۱}(B)} x \in f^{-۱}(B)$$

$$\Longrightarrow f(x) \in f(f^{-۱}(B)) \overset{f(x)=y}{\Longrightarrow} y \in f(f^{-۱}(B))$$

۷. گیریم تابع $f: X \to Y$ به قسمی است که $f(X) = Y$، B و C زیر مجمو عه هایی از Y هستند. ثابت کنید که اگر $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$، آنگاه $B = C$. مثالی بیاورید که نشان دهد در حالت $f(X) \neq Y$ ، حکم نادرست است.

جواب: برای آنکه ثابت کنیم $B = C$، کافی است نشان دهیم $B \subseteq C$ و $C \subseteq B$. فرض کنیم $c \in C$ دلخواه باشد. چون $f(X) = Y$ عنصر $x \in X$ وجود دارد به طوری که $f(x) = c$.

در نتیجه $x \in f^{-1}(c)$. از آنجایی که $f^{-1}(c) \subseteq f^{-1}(C)$، نتیجه می گیریم $x \in f^{-1}(C)$. از طرفی $f^{-1}(C) = f^{-1}(B)$، در نتیجه $x \in f^{-1}(B)$ و این یعنی $c = f(x) \in B$. ثابت کردیم $C \subseteq B$. اثبات $B \subseteq C$ مشابه است.

شرط $f(X) = Y$ لازم است. به عنوان مثال، تابع تمرین (۵-الف) را در نظر می گیریم . فرض کنیم $C = \{۳\}$ و $B = \{۳,۴\}$. داریم :

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{۳,۴\}) = \{c\} \qquad f^{-1}(C) = f^{-1}(\{۳\}) = \{c\}$$

مشاهده می شود که $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$ در حالی که $B \neq C$.

۸. گیریم X و Y دو مجموعه و $p_X: X \times Y \to X$ و $p_Y: X \times Y \to Y$ به ترتیب توابعی هستند که با $p_X(x,y) = x$ و $p_Y(x,y) = y$ برای تمام $(x,y) \in X \times Y$ داده شده اند.(p_X و p_Y به ترتیب X-تصویر و Y-تصویر گفته می شوند). ثابت کنید که اگر $\mathcal{R}$ یک رابطه از X به Y باشد ، یعنی $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$، آنگاه $p_X(\mathcal{R}) = Dom\mathcal{R}$ و $p_Y(\mathcal{R}) = Im\mathcal{R}$.

جواب:

$$x \in p_X(\mathcal{R}) \Rightarrow \exists (x,y) \in \mathcal{R} \ \ s.t \ \ p_X(x,y) = x \Longrightarrow x \in Dom\mathcal{R}$$

برعکس،

$$x \in Dom\mathcal{R} \Longrightarrow \exists y \in Y \quad s.t \ \ (x,y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow p_X(x,y) = x$$
$$\Longrightarrow x \in p_X(\mathcal{R})$$

در نتیجه $Dom\mathcal{R} = p_X(\mathcal{R})$

اثبات $p_Y(\mathcal{R}) = Im\mathcal{R}$ مشابه است.

۱۰. تابع $f: X \to Y$ و $B \subseteq Y$ مفروض اند. ثابت کنید:

$$f^{-1}(Y-B)=X-f^{-1}(B)$$

جواب:

$$x\in f^{-1}(Y-B)\Leftrightarrow f(x)\in(Y-B)\Leftrightarrow f(x)\notin B\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B)\Leftrightarrow$$
$$x\in(X-f^{-1}(B))$$

۱۱. گیریم $f:X\to Y$ یک تابع و A و B زیر مجمو عه هایی از X هستند. مثالی بیاورید که نشان دهد عبارت زیر نادرست است.

$$f(A-B)=f(A)-f(B)$$

جواب: فرض کنیم $X=\{a,b,c,d\}$ و $Y=\{۱,۲,۳\}$. تابع $f:X\to Y$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f=\{(a,۱),(b,۱)\}$$

قرار می دهیم $A=\{a\}$ و $B=\{b\}$. در نتیجه :

$$f(A-B)=f(\{a\}-\{b\})=f(\{a\})=\{۱\}$$
$$f(A)-f(B)=f(\{a\})-f(\{b\})=\{۱\}-\{۱\}=\emptyset$$

پس:

$$f(A-B)\neq f(A)-f(B)$$

۱۳. گیریم $f:X\to Y$ یک تابع است. ثابت کنید خانواده ی مجموعه های $\mathcal{P}=\{f^{-1}(y)\,|\,f^{-1}(y)\neq\emptyset\,,y\in Y\}$، یک افراز X است.

جواب: طبق تعریف $\mathcal{P}$، اعضای $\mathcal{P}$ ناتهی هستند . نشان می دهیم این اعضاء، دوبه دو مجزا هستند. فرض کنیم $f^{-1}(y_۱)$ و $f^{-1}(y_۲)$ دو عضو دلخواه در $\mathcal{P}$ باشند که $y_۱\neq y_۲$ عناصری از Y می باشند. باید نشان دهیم $f^{-1}(y_۱)\cap f^{-1}(y_۲)=\emptyset$. به برهان خلف فرض

کنیم $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) \neq \emptyset$، یعنی $\exists x \in f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2)$. بنایراین $x \in f^{-1}(y_1)$ و $x \in f^{-1}(y_2)$. این نتیجه می دهد که $f(x) = y_1$ و $f(x) = y_2$ و این با تابع بودن f تناقض دارد . لذا فرض خلف باطل است و داریم $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset$.

حال نشان می دهیم $\bigcup_{\substack{y\in Y \\ f^{-1}(y)\neq\emptyset}} f^{-1}(y) = X$. به وضوح $\bigcup_{\substack{y\in Y \\ f^{-1}(y)\neq\emptyset}} f^{-1}(y) \subseteq X$. فرض کنیم $x \in X$ دلخواه باشد . در نتیجه $f(x) \in Y$. از این نتیجه می گیریم که $\exists y \in Y \quad s.t \ f(x) = y$. در نتیجه $x \in f^{-1}(y)$ و لذا $x \in \bigcup_{\substack{y\in Y \\ f^{-1}(y)\neq\emptyset}} f^{-1}(y)$. بنابراین $X \subseteq \bigcup_{\substack{y\in Y \\ f^{-1}(y)\neq\emptyset}} f^{-1}(y)$. در نتیجه $\mathcal{P}$ افراز X است .

۱۴. تابع $f: X \to Y$ مفروض است. ثابت کنید رابطه ی

$$\mathcal{R}(f) = \{(a,b) \in X \times X \mid f(a) = f(b)\}$$

یک رابطه ی هم ارزی در X است .

جواب : $\mathcal{R}(f)$ انعکاسی است زیرا:

$$\forall a \in X \quad f(a) = f(a) \Rightarrow (a,a) \in \mathcal{R}(f)$$

$\mathcal{R}(f)$ متقارن است زیرا:

$$if\ (a,b) \in \mathcal{R}(f) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow$$
$$(b,a) \in \mathcal{R}(f)$$

$\mathcal{R}(f)$ متعدی است زیرا:

$$if\ (a,b) \in \mathcal{R}(f) \wedge (b,c) \in \mathcal{R}(f) \Rightarrow f(a) = f(b) \wedge f(b) = f(c)$$
$$\Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}(f)$$

۱۵. فرض کنیم f ، $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}(f)$ همانهایی باشند که در مسئله های ۱۳ و۱۴ عنوان شده است . ثابت کنید $X/\mathcal{R}(f) = \mathcal{P}$ و $X/\mathcal{P} = \mathcal{R}(f)$.

جواب: نشان می دهیم $X/\mathcal{P} = \mathcal{R}(f)$

$$(a,b) \in X/\mathcal{P} \iff \exists y \in Y \quad s.t \quad a,b \in f^{-1}(y)$$

$$\iff \exists y \in Y \quad s.t \quad f(a) = f(b) = y$$

$$\iff (a,b) \in \mathcal{R}(f)$$

حال طبق قضیه ی ۵ داریم :

$$\frac{X}{\mathcal{R}(f)} \overset{\mathcal{R}(f) = \frac{X}{\mathcal{P}}}{=} \frac{X}{\frac{X}{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$$

تمرین ۳. ۶– صفحه ی ۹۱.

۵. ثابت کنید که تابع مشخصه ی $\chi_A: X \to \{0,1\}$ که در مثال ۸، بخش ۴ آمده است، پوششی است اگر وتنها اگر $A \subset X$ و $A \neq \emptyset$. چه وقت $\chi_A: X \to \{0,1\}$ دو سویی می شود؟

جواب: برای هر $A \subseteq X$ تابع χ_A به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \in X - A \end{cases}$$

فرض کنیم $A \subset X$ (A زیر مجموعه ی سره ی X) و $A \neq \emptyset$ باشد. چون $A \neq \emptyset$، پس عنصری مانند $a \in A$ وجود دارد. طبق تعریف χ_A داریم $\chi_A(a) = ۱ (*)$. از طرفی چون

$A \subset X$، لذا $X - A \neq \emptyset$. در نتیجه عنصری مانند $b \in X - A$ وجود دارد . طبق تعریف χ_A داریم $\chi_A(b) = \circ$ $(**)$. از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می گیریم χ_A پوشا است.

بر عکس، فرض کنیم χ_A پوشا باشد، بنابراین :

$$\exists a \in X \quad s.t \quad \chi_A(a) = ۱ \implies a \in A \implies A \neq \emptyset$$

$$\exists b \in X \quad s.t \quad \chi_A(b) = \circ \implies b \in X - A \implies A \subset X$$

لذا $A \subset X$ و $A \neq \emptyset$.

طبق تعریف χ_A داریم $\forall x \in A \quad \chi_A(x) = ۱$. لذا اگر قرار باشد χ_A یک به یک باشد، نباید مجموعه ی A بیش از یک عنصر داشته باشد . زیرا به برهان خلف اگر دو عنصر $x, x' \in A$ موجود باشند که $x \neq x'$، آنگاه $\chi_A(x) = \chi_A(x') = ۱$ و این تناقض با یک به یکی دارد.

با برهان مشابه، $X - A$ نیز بیش از یک عنصر نخواهد داشت . لذا تابع χ_A دو سویی است اگر و فقط اگر X دو عنصر داشته باشد که فقط یک عنصر آن متعلق به A است.

۶. ثابت کنید که تابع ثابت $C_b: X \to Y$ پوششی است اگر و تنها اگر $Y = \{b\}$. چه وقت $C_b: X \to Y$ یک به یک می شود؟

جواب: ابتدا فرض کنیم $C_b: X \to Y$ پوششی باشد. نشان می دهیم $Y = \{b\}$. فرض کنیم c عنصر دیگری از Y باشد. چون C_b پوششی است داریم :

$$\exists x \in X \quad s.t \quad C_b(x) = c \overset{C_b(x)=b}{\Longleftrightarrow} b = c$$

لذا Y عنصر دیگری غیر از b ندارد . در نتیجه $Y = \{b\}$.

بر عکس، فرض کنیم $Y = \{b\}$. طبق تعریف تابع C_b داریم $\forall x \in X \quad C_b(x) = b$. بنابراین C_b پوششی است.

نشان می دهیم C_b یک به یک است اگر و فقط اگر X یک مجموعه ی تک عضوی باشد. فرض کنیم C_b یک به یک باشد و نیز فرض کنیم $x_۱ , x_۲ \in X$ دو عنصر دلخواه در X باشند. داریم:

$$C_b(x_۱) = C_b(x_۲) = b$$

چون C_b یک به یک است باید $x_۱ = x_۲$ و این یعنی X بیش از یک عضو ندارد.

برعکس، اگر X یک مجموعه ی تک عضوی باشد، آنگاه به انتفای مقدم C_b یک به یک است. (زیرا دو عنصر متفاوت در X وجود ندارد).

۱۰. گیریم X یک مجموعه ی متناهی با m عنصر و Y یک مجموعه ی متناهی با n عنصر است. ثابت کنید:

الف) اگر $m > n$ ، آنگاه هیچ تابع یک به یک $f: X \to Y$ وجود ندارد.

ب) اگر $m \le n$ ، آنگاه دقیقاً $\frac{(n!)}{(n-m)!}$ تابع یک به یک وجود دارد.

(به مسئله ی ۱۱ ، تمرین ۴. ۳ نگاه کنید.)

جواب: الف) فرض کنیم $X = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_m\}$ و $Y = \{y_۱, y_۲, \ldots, y_n\}$ و نیز فرض کنیم $m > n$.

عناصر Y را به عنوان n ظرف خالی در نظر می گیریم که عناصر X باید در این ظروف قرار بگیرند. عنصر $x_i(۱ \le i \le m)$ در ظرف $y_j(۱ \le j \le n)$ قرار می گیرد هر گاه $f(x_i) = y_j$. طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک ظرف، شامل دو عنصر از مجموعه ی X است و این یعنی تصویر این دو عنصر با هم برابر است. لذا f نمی تواند یک به یک باشد.

ب) اگر $m \le n$ باشد، آنگاه عنصر $x_۱$ در یکی از n ظرف قرار می گیرد. یعنی n حالت برای انتخاب تصویر $x_۱$ وجود دارد. $f(x_۱) = y_۱$ یا $f(x_۱) = y_۲$ یا...یا $f(x_۱) = y_n$.

برای عنصر $x_۲$, $n-۱$ حالت انتخاب وجود دارد، زیرا $x_۲$ را نمی توان به تصویر $x_۱$ تحت f نظیر کرد. (چون در این صورت f یک به یک نخواهد بود).

برای عنصر $x_۳$، $n-۲$ حالت انتخاب داریم. به همین نحو برای عنصر x_m، تعداد $n-(m-۱)=n-m+۱$ حالت انتخاب وجود دارد. طبق اصل ضرب در آنالیز ترکیبی، تعداد کل حالت های انتخاب از ضرب تک تک مرحله های بالا حاصل می شود. یعنی :

$$\textbf{تعداد کل حالتهای انتخاب} = n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\ldots\times(n-m+۱)$$
$$=n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-m+۱)\frac{(n-m)!}{(n-m)!}$$
$$=\frac{n!}{(n-m)!}$$

۱۱. گیریم X یک مجموعه ی متناهی با m عنصر است. چند تابع دو سویی از X روی X وجود دارد؟(تذکر: یک تابع دوسویی از یک مجموعه ی متناهی روی خودش، در مواردی *جایگشت* نامیده می شود.)

جواب: در تمرین قبل قرار دهید $m=n$، لذا $m!$ تابع یک به یک از X به X وجود دارد. اما همه این توابع پوشا هستند زیرا اگر به برهان خلف فرض کنیم یکی از این توابع مانند f پوشا نباشد، آنگاه عنصری مانند $x_i(۱\leq i\leq m)$ در X وجود دارد به طوری که تصویر هیچ عنصری نیست ، یعنی $\nexists x_j\in X\ (۱\leq j\leq m)\ s.t\ f(x_j)=x_i$. بنابراین تابع f، از مجموعه ی X به مجموعه ی $X-\{x_i\}$ یک به یک است و این طبق قسمت (الف) تمرین قبل غیر ممکن است ، زیرا $X-\{x_i\}$ یک مجموعه ی $m-۱$ عنصری است . بنابراین فرض خلف باطل و f پوشا است . در نتیجه $m!$ تابع دو سویی از X به X وجود دارد.

۱۳. عکس مسئله ی ۱۲ را ثابت کنید:

الف) اگر برای هر $A\subset X$ ، $f^{-1}(f(A))=A$ ، آنگاه f یک به یک است.

ب) اگر برای هر $B\subset Y$, $f(f^{-1}(B)=B$ ، آنگاه f پوششی است.

جواب: الف) فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$ که در آن $x_1, x_2 \in X$. در نتیجه داریم:

$$f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = f(\{x_2\})$$

لذا تصویر وارون این دو مجموعه نیز با هم برابرند یعنی $f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(f(\{x_2\}))$. بنا بر فرض، داریم $f^{-1}\left(f(\{x_1\})\right) = \{x_1\}$ و $f^{-1}\left(f(\{x_2\})\right) = \{x_2\}$. در نتیجه $\{x_1\} = \{x_2\}$ و این یعنی $x_1 = x_2$. لذا f یک به یک است.

ب) فرض کنیم $y \in Y$ دلخواه باشد. باید عنصری مانند $x \in X$ بیابیم به طوری که $f(x) = y$. طبق فرض داریم $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. لذا :

$$\exists x \in f^{-1}(\{y\}) \quad s.t \quad f(x) = y$$

و این حکم را ثابت می کند .

۱۴. فرض کنیم $f: X \to Y$ یک به یک است و $B \subset X$. ثابت کنید $f(X - B) = f(X) - f(B)$.

جواب: ابتدا نشان می دهیم $f(X) - f(B) \subseteq f(X - B)$ (این رابطه همیشه برقرار است) :

$$y \in f(X) - f(B) \Rightarrow y \in f(X) \wedge \quad y \notin f(B)$$

$$\Rightarrow \exists x \in X \quad s.t \quad f(x) = y \ \wedge \quad y \notin f(B)$$

$$\Rightarrow \exists x \in X \quad s.t \quad f(x) = y \ \wedge \quad x \notin B$$

$$\Rightarrow \exists x \in (X - B) \quad s.t \quad f(x) = y$$

$$\Rightarrow y \in f(X - B)$$

برای اثبات عکس نامساوی، یعنی $f(X - B) \subseteq f(X) - f(B)$، یک به یکی لازم است:

$$y \in f(X - B) \xrightarrow{f \text{ یک به یک است}} \exists!\, x \in (X - B) \quad s.t \quad y = f(x)$$

$$\Longrightarrow (\exists x \in X \quad s.t \quad f(x) = y) \wedge (\nexists x' \in B \quad s.t \quad f(x') = y)$$

$$\Longrightarrow y \in f(X) \wedge y \notin f(B) \Longrightarrow y \in f(X) - f(B)$$

(توجه کنید که عبارت $\exists! x$ به این معنی است که یک عنصر منحصر به فرد مانند x وجود دارد)

۱۶. فرض کنیم تابع $f: X \to X$ چنان باشد که برای هر $x \in X$ ، $f(f(x)) = x$. ثابت کنید f یک رابطه ی متقارن روی X است.

جواب: فرض کنیم $(x, y) \in f$ ، یعنی $f(x) = y(*)$. از طرفی بنابر فرض داریم $f\big(f(x)\big) = x(**)$. از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می گیریم $f(y) = x$ و این یعنی $(y, x) \in f$. لذا f متقارن است.

۱۷. عکس قضیه ی ۱۴ را ثابت کنید: فرض کنید $f: X \to Y$ چنان تابعی است که f^{-1} تابعی از Y به X است . آنگاه $f: X \to Y$ دو سویی است.

جواب: f پوشا است زیرا :

$$Imf = Dom\, f^{-1} = Y$$

(چون f^{-1} تابع است $Dom\, f^{-1} = Y$).

f یک به یک است زیرا:

$$if\ (x_1, y) \in f, (x_2, y) \in f \Longrightarrow (y, x_1) \in f^{-1}, (y, x_2) \in f^{-1}$$

$$\xRightarrow{f^{-1}\ \text{تابع است}} x_1 = x_2$$

۱۸. ثابت کنید $f: X \to Y$ یک به یک است اگر و تنها اگر برای تمام زیر مجموعه های X مانند A و B ، $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

جواب: اگر f یک به یک باشد، آنگاه طبق قضیه ی ۱۳ ، حکم برقرار است.

بر عکس، فرض کنیم برای هر دو زیر مجموعه ی A و B از X داشته باشیم $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$. نشان می دهیم f یک به یک است. فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2) = y$. قرار می دهیم $A = \{x_1\}$ و $B = \{x_2\}$.

طبق فرض داریم:

$$f(\{x_1\}\cap\{x_2\}) = f(\{x_1\})\cap f(\{x_2\}) = \{f(x_1)\}\cap\{f(x_2)\}$$
$$= \{y\}\ \cap\{y\} = \{y\}$$

بنابراین $\{x_1\}\cap\{x_2\} \neq \emptyset$، زیرا اگر $\{x_1\}\cap\{x_2\} = \emptyset$، آنگاه $f(\{x_1\}\cap\{x_2\}) = f(\emptyset) = \emptyset$ و این تناقض است. از $\{x_1\}\cap\{x_2\}\neq\emptyset$ نتیجه می گیریم $x_1 \in \{x_2\}$ و این یعنی $x_1 = x_2$. در نتیجه f یک به یک است.

۱۹. عکس مسئله ی ۱۵ را ثابت کنید:

اگر برای تمام زیر مجموعه های X مانند A و B، $f(A-B) = f(A)-f(B)$، آنگاه f یک به یک است.

جواب: فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$. نشان می دهیم $x_1 = x_2$. مجموعه های A و B را به صورت $A = \{x_1\}$ و $B = \{x_2\}$ تعریف می کنیم. طبق فرض داریم :

$$f(\{x_1\}) - f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}-\{x_2\}) \Longrightarrow \{f(x_1)\}-\{f(x_2)\}$$

$$= f(\{x_1\}-\{x_2\}) \xRightarrow{f(x_1)=f(x_2)} \emptyset = f(\{x_1\}-\{x_2\}) \Longrightarrow$$

$$\{x_1\}-\{x_2\} = \emptyset \Longrightarrow x_2 \in \{x_1\} \Longrightarrow x_1 = x_2$$

بنابراین f یک به یک است.

۲۰. آیا عکس مسئله ی ۱۴ صحیح است ؟

جواب: عکس مسئله ی ۱۴ صحیح است. یعنی اگر برای هر $B \subset X$ داشته باشیم $f(X - B) = f(X) - f(B)$، آنگاه f یک به یک است. برای اثبا ت این حکم ، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم . فرض کنیم f یک به یک نباشد . ثابت می کنیم زیر مجمو عه ی B از X وجود دارد به طوری که $f(X - B) \neq f(X) - f(B)$. از آنجایی که f یک به یک نیست، دو عنصر $a, b \in X$ وجود دارند به طوری که $a \neq b$ و $f(a) = f(b)$. قرار می دهیم $B = \{b\}$. بنابراین $f(X) - f(B) = f(X) - f(\{b\}) = f(X) - \{f(b)\}$. در نتیجه $f(b) \notin f(X) - f(B)$. از طرفی $a \in X - B$ و از این نتیجه می گیریم $f(a) = f(b) \in f(X - B)$. در نتیجه $f(X) - f(B) \neq f(X - B)$.

تمرین ۳. ۷- صفحه ی ۹۵.

۵. گیریم $f: X \to Y$ دو سویی و $f^{-1}: Y \to X$ تابع وارون f است. ثابت کنید که $fof^{-1} = I_Y$ و $f^{-1}of = I_X$.

جواب:

$$f^{-1}of = \{(x, x') \in X \times X \mid \exists y \in Y \ \ s.t \ \ (x, y) \in f \ \wedge (y, x') \in f^{-1}\}$$

$$= \{(x, x') \in X \times X \mid \exists y \in Y \quad s.t \ \ (x, y) \in f \ \ \wedge \ \ (x', y) \in f\}$$

$$\overset{f \text{ تابع است}}{=\!=\!=\!=} \{(x, x') \in X \times X \mid x = x'\} = \{(x, x) \in X \times X\} = I_X$$

$$fof^{-1} = \{(y, y') \in Y \times Y \mid \exists x \in X \quad s.t \quad (y, x) \in f^{-1} \ \wedge \ (x, y') \in f\}$$

$$= \{(y, y') \in Y \times Y \mid \exists x \in X \ \ s.t \quad (y, x) \in f^{-1} \ \ \wedge \ (y', x) \in f^{-1}\}$$

$$\overset{f^{-1} \text{ تابع است}}{=\!=\!=\!=} \{(y, y') \in Y \times Y \mid y = y'\} = \{(y, y) \in Y \times Y\} = I_Y$$

۶. گیریم $f: X \to Y$ یک تابع است. اگر توابع $g: Y \to X$ و $h: Y \to X$ وجود داشته باشند به طوری که $gof = I_X$ و $foh = I_Y$ ، ثابت کنید $f: X \to Y$ دوسویی است و $g = h = f^{-1}$.

جواب: در قضیه ی ۱۶ ثابت شد که چنین تابع f ی، یک به یک و پوشا است و لذا دوسویی است. برای تکمیل برهان کافی است نشان دهیم $g = h = f^{-1}$.

$$h = I_X oh \overset{\text{تمرین قبل}}{=\!=\!=} (f^{-1}of)\ oh \overset{\text{شرکت پذیری}}{=\!=\!=} f^{-1}o(foh) \overset{\text{فرض مسأله}}{=\!=\!=} f^{-1}o\ I_Y = f^{-1}$$

$$g = goI_Y \overset{\text{تمرین قبل}}{=\!=\!=} go(fof^{-1}) \overset{\text{شرکت پذیری}}{=\!=\!=} (gof)of^{-1} \overset{\text{فرض مسأله}}{=\!=\!=} I_X of^{-1} = f^{-1}$$

لذا $g = h = f^{-1}$ و حکم اثبات می شود .

۹. فرض کنیم $\mathcal{R}$ یک رابطه روی X است. ثابت کنید :

الف) $\mathcal{R}$ متقارن است اگر وتنها اگر $\mathcal{R}o\mathcal{R} \supseteq I_X$.

ب) $\mathcal{R}$ متعدی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}o\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

جواب: الف) این حکم اشتباه است. زیرا فرض کنیم $X = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{R} = \{(a, b), (b, a)\}$. مشاهده می شود که $\mathcal{R}$ متقارن است ولی $\mathcal{R}o\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b)\}$ که شامل (c, c) نیست، لذا $I_X \nsubseteq \mathcal{R}o\mathcal{R}$.

ب) فرض کنیم $\mathcal{R}$ متعدی باشد. نشان می دهیم $\mathcal{R}o\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.

$$(x, y) \in \mathcal{R}o\mathcal{R} \Longrightarrow \exists z \in X\ \ s.t\ \ (x, z) \in \mathcal{R} \wedge (z, y) \in \mathcal{R}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{R}\ \text{متعدی}} (x, y) \in \mathcal{R}$$

برعکس، فرض کنیم $\mathcal{R}o\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ ، نشان می دهیم که $\mathcal{R}$ متعدی است :

$$if\ (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R} \xRightarrow{\text{طبق تعریف}} (x,z) \in \mathcal{R}o\mathcal{R} \xRightarrow{\mathcal{R}o\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}} (x,z) \in \mathcal{R}$$

بنابراین $\mathcal{R}$ متعدی است.

۱۱. فرض کنید $\mathcal{R}$ و $\mathcal{S}$ رابطه هایی از X و Y هستند و $\mathcal{T}$ یک رابطه از Y به Z است. ثابت کنید

$$\mathcal{T}o\,(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq (\mathcal{T}o\mathcal{R}) \cap (\mathcal{T}o\mathcal{S})$$

جواب:

$$(x,z) \in \mathcal{T}o\,(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \Longrightarrow \exists y \in Y \ \ s.t\ \ (x,y) \in (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})\ \wedge (y,z)\ \in \mathcal{T}$$

$$\xRightarrow{\text{خودتوانی–تعریف اشتراک}} \exists y \in Y \ \ s.t\ (\ (x,y) \in \mathcal{R}\ \wedge\ (x,y) \in \mathcal{S})\ \wedge ((y,z) \in \mathcal{T}\ \wedge (y,z) \in \mathcal{T})$$

$$\xRightarrow{\text{جابجایی–شرکت پذیری}} \exists y \in Y \ \ s.t\ \ ((x,y) \in \mathcal{R}\ \ \wedge (y,z) \in \mathcal{T})\ \wedge ((x,y) \in \mathcal{S}\ \wedge\ (y,z) \in \mathcal{T})$$

$$\Longrightarrow (x,z) \in (\mathcal{T}o\mathcal{R}) \wedge (x,z) \in (\mathcal{T}o\mathcal{S}) \Longrightarrow (x,z) \in (\mathcal{T}o\mathcal{R}) \cap (\mathcal{T}o\mathcal{S})$$

۱۲. گیریم $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دو تابع دو سویی هستند. ثابت کنید $gof: X \to Z$ دوسویی است و تابع وارون $(gof)^{-1}: Z \to X$ ، ترکیب $f^{-1}og^{-1}: Z \to X$ است، که در آن تابع های $g^{-1}: Z \to Y$ و $f^{-1}: Y \to X$ به ترتیب ، وارون توابع g و f هستند. خلاصه اینکه $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

جواب: طبق تمرین ۷ ، $gof: X \to Z$ دوسویی است.

نشان می دهیم $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$. طبق تمرین ۵ داریم:

$$g^{-1}og = I_Y,\ \ f^{-1}of = I_X,\ \ fof^{-1} = I_Y,\ \ gog^{-1} = I_Z$$

حال نتیجه می گیریم :

$$(gof)o\,(f^{-۱}\,og^{-۱}) = go(fof^{-۱})og^{-۱} = go\,I_Y\,og^{-۱} = gog^{-۱} = I_Z$$

از طرفی :

$$(f^{-۱}\,og^{-۱})o(gof) = f^{-۱}o(g^{-۱}og)of = f^{-۱}\,o\,I_Y\,of = f^{-۱}of = I_X$$

از تمرین **۶** نتیجه می گیریم $(gof)^{-۱} = f^{-۱}og^{-۱}$.

فصل چهارم

مجموعه های شمارای نامتناهی و ناشمارا

تمرین ۵. ۱- صفحه ی ۱۲۱.

۱. برهان قضیه ی ۱ را کامل کنید.

جواب: ابتدا ثابت می کنیم g یک به یک است. فرض کنیم $g(y_1) = g(y_2)$. سه حالت را در نظر می گیریم:

حالت ۱) اگر $y_1, y_2 \in X$ ،آنگاه:

$$g(y_1) = g(y_2) \xrightarrow{g\text{تعریف}} f(y_1) = f(y_2) \xrightarrow{f\text{ یک به یک}} y_1 = y_2 \Rightarrow g \text{ یک به یک}$$

حات ۲) اگر $y_1, y_2 \in Y - X$، آنگاه:

$$g(y_1) = g(y_2) \xrightarrow{g\text{تعریف}} y_1 = y_2 \Rightarrow g \text{ یک به یک}$$

حالت۳) اگر $y_1 \in X$ **و** $y_2 \in Y - X$ (**یا** $y_2 \in X$ و $y_1 \in Y - X$)، آنگاه:

$$g(y_1) = g(y_2) \xrightarrow{g\text{تعریف}} f(y_1) = y_2$$

ولی این حالت غیر ممکن است، زیرا بنا به تعریف f باید داشته باشیم $f(y_1) \in X$ در حالی که $y_2 \in Y - X$. پس حالت ۳ اتفاق نمی افتد.

تابع g پوشا نیست ، زیرا:

$$g(Y) = g(X \cup (Y - X)) \overset{\text{قضیه ی ۱۰}}{=} g(X) \cup g(Y - X) = f(X) \cup (Y - X) \overset{f(X) \neq X}{\neq} X \cup (Y - X) = Y$$

بنابراین $g(Y) \neq (Y)$ و اثبات کامل می شود.

۳. ثابت کنید که مجموعه های $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی هستند.

جواب: فرض کنیم $\mathbb{Z}_e$ مجموعه ی اعداد صحیح زوج باشد. $\mathbb{Z}_e$ یک زیر مجموعه ی سره ی $\mathbb{Z}$ است $(\mathbb{Z}_e \subset \mathbb{Z})$. تابع $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_e$ با ضابطه ی $f(x) = ۲x$، دو سویی است (اثبات دو سویی بودن f سر راست است). بنابراین طبق تعریف، $\mathbb{Z}$ نامتناهی است. چون $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ، طبق قضیه ی (۱-الف) $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ نیز نامتناهی اند.

۴. ثابت کنید که اگر A یک مجموعه ی نامتناهی باشد ،آنگاه $A \times A$ نیز نامتناهی است.

جواب: چون A نامتناهی است، طبق تعریف ، تابع یک به یک $f: A \to A$ وجود دارد به طوری که $f(A) \neq A$. تابع $g: A \times A \to A \times A$ با ضابطه ی $g(x,y) = (f(x), f(y))$ یک به یک است زیرا :

$$if\ g(x_۱, y_۱) = g(x_۲, y_۲) \implies (f(x_۱), f(y_۱)) = (f(x_۲), f(y_۲))$$

$$\implies f(x_۱) = f(x_۲) \wedge f(y_۱) = f(y_۲) \xRightarrow{f\ \text{یک به یک است}} x_۱ = x_۲ \wedge y_۱ = y_۲$$

$$\implies (x_۱, y_۱) = (x_۲, y_۲)$$

از $f(A) \neq A$ نتیجه می گیریم:

$$\exists\, a \in A \ \ s.t \ \ a \notin f(A) \implies (a,a) \notin f(A) \times f(A)$$

$$\implies (a,a) \notin g(A \times A) \implies g(A \times A) \neq A \times A$$

در نتیجه g پوشا نیست.

۵. ثابت کنید که اگر مجموعه های A و B نامتناهی باشند، آنگاه $A \cup B$ یک مجموعه ی نامتناهی است.

جواب: $A \cup B$ یک ابر مجموعه ی A است یعنی $A \subseteq A \cup B$. لذا، طبق قضیه ی (۱-ب)، $A \cup B$ نیز نامتناهی است. (دقت کنید که با فرض ضعیف تر هم، این حکم برقرار است. یعنی لازم نیست هم A و هم B نامتناهی باشند تا نتیجه بگیریم $A \cup B$ نامتناهی است. نامتناهی بودن یکی از این دو مجموعه، ایجاب می کند که $A \cup B$ نامتناهی است).

۶. ثابت کنید اجتماعی متناهی از مجموعه های متناهی، متناهی است.

جواب:به استقراء روی تعداد مجموعه ها پیش می رویم.

پایه ی استقراء: حکم را برای دو مجموعه ثابت می کنیم . فرض کنیم A و B دو مجموعه ی متناهی باشند. اگر $A = \emptyset$ (یا $B = \emptyset$)، آنگاه $A \cup B = B$ (یا $A \cup B = A$) که طبق فرض متناهی است. فرض کنیم A و B ناتهی باشند. طبق قضیه ی ۴، A با $\mathbb{N}_k$ و B با $\mathbb{N}_{k'}$ در تناظر یک به یک است. بنابراین می توان فرض کرد $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{k'}\}$. تابع $f: A \cup B \to \mathbb{N}_{k+k'}$ با ضابطه ی

$f(x)=\begin{cases} i & if\ \ x = a_i \in A \\ j+k & if\ \ x = b_j \in B \end{cases}$ $\quad (1 \le i \le k ،\ 1 \le j \le k')$ یک به یک و پوشاست.

برای اثبات یک به یکی f فرض کنیم $f(x) = f(x')$. دو حالت را در نظر می گیریم.

حالت اول) $x, x' \in A$. در این صورت:

$$\exists\ 1 \le i \le k\ \ s.t\ \ f(x) = f(x') = i \Longrightarrow x = x' = a'_i \Longrightarrow$$ f یک به یک

حالت دوم) $x, x' \in B$. در این صورت:

$$\exists\ 1 \le j \le k'\ \ s.t\ \ f(x) = f(x') = j + k \Longrightarrow x = x' = b'_j$$

در نتیجه f یک به یک است.

برای اثبات پوشایی f فرض کنیم $n \in \mathbb{N}_{k+k'}$. دو حالت اتفاق می افتد:

حالت ۱) $۱ \le n \le k$. در این صورت طبق تعریف f داریم $f(a_n) = n$. لذا در این حالت f پوشاست.

حالت ۲) $k \le n \le k + k'$. در این صورت $n = j + k$ که در آن $۱ \le j \le k'$. بنابراین طبق تعریف f داریم $f(b_j) = j + k = n$ و در این حالت نیز f پوشاست.

نشان دادیم $A \cup B$ درتناظر یک به یک با $\mathbb{N}_{k+k'}$ است. طبق قضیه ی ۴، $A \cup B$ متناهی است.

فرض استقراء: فرض کنیم حکم برای هر $n - ۱$ مجموعه ی متناهی برقرار باشد.

اثبات حکم برای n مجموعه: فرض کنیم $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ مجموعه هایی متناهی باشند. طبق فرض استقراء $\bigcup_{i=۱}^{n-۱} A_i$ متناهی است. چون A_n نیز متناهی است بنا بر پایه استقراء، $(\bigcup_{i=۱}^{n-۱} A_i) \cup A_n$ متناهی است و این یعنی $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i$ متناهی است.

۷. فرض کنید $A \cup B$، اجتماع دو مجموعه ی A و B نامتناهی است. ثابت کنید که حداقل یکی از دو مجموعه ی A و B نامتناهی است.

جواب: به برهان خلف فرض کنیم هم A و هم B متناهی باشند. بنابراین طبق مسئله ی قبل، $A \cup B$ متناهی است و این تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حداقل یکی از مجموعه های A و B نامتناهی است.

۸. تعمیم زیر از قضیه ی ۳ را ثابت کنید: اگر Y یک زیر مجموعه ی متناهی از مجموعه ی نامتناهی X باشد، آنگاه $X - Y$ نامتناهی است.

جواب: به برهان خلف فرض کنیم $X - Y$ متناهی باشد. بنابراین طبق مسئله ی ۶، $(X - Y) \cup Y$ متناهی است. این یعنی X متناهی است ($(X - Y) \cup Y = X$) که تناقض با فرض دارد. لذا $X - Y$ نامتناهی است.

۹. ثابت کنید که اگر مجموعه ی A به قسمی باشد که هر ابر مجموعه ی سره ی A نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است.

جواب: فرض کنیم مجموعه ی A به قسمی باشد که هر ابر مجموعه ی سره ی آن نامتناهی است. اگر $x \notin A$، آنگاه $A \cup \{x\}$ طبق فرض، یک مجموعه ی نامتناهی است. (زیرا $A \cup \{x\}$ ابر مجموعه ی A است). بنابر قضیه ی ۳، $(A \cup \{x\}) - \{x\}$ نیز نامتناهی است و این یعنی A نامتناهی است.

۱۰. ثابت کنید که اگر یک مجموعه ی B به قسمی باشد که هر زیر مجموعه ی سره ی B متناهی باشد، آنگاه B متناهی است.

جواب: فرض کنیم مجموعه ی B به قسمی باشد که هر زیر مجموعه ی سره ی آن متناهی است. اگر $x \in B$، آنگاه $B - \{x\}$، یک زیر مجموعه ی سره ی B است که طبق فرض، متناهی است. اما بنابر تمرین ۶، $(B - \{x\}) \cup \{x\}$ متناهی است. در نتیجه B متناهی است.

۱۲. ثابت کنید که اگر مجموعه ی A به قسمی باشد که $A \times A$ نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است.

جواب: عکس نقیض حکم را ثابت می کنیم. فرض کنیم A متناهی باشد. نشان می دهیم $A \times A$ متناهی است. اگر $A = \emptyset$، آنگاه $A \times A = \emptyset$ و لذا $A \times A$ متناهی است. فرض کنیم $A \neq \emptyset$. طبق قضیه ی ۴، A با یک $\mathbb{N}_k$ در تناظر یک به یک است. فرض کنیم A به صورت $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ باشد. مجموعه ی $A \times \{x_1\}$ متناهی است، زیرا تابع $f: A \to A \times \{x_1\}$ با ضابطه ی $f(a) = (a, x_1)$، یک تناظر یک به یک است. (اثبات دو سویی بودن f سر راست است). با استدلالی مشابه، ثابت می شود $A \times \{x_i\}$، برای هر $2 \leq i \leq k$ نیز متناهی است. طبق مسئله ی ۶، $\bigcup_{i=1}^{k} (A \times \{x_i\})$ متناهی است. از طرفی $A \times A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \times \{x_i\})$. در نتیجه $A \times A$ متناهی است.

۱۳. ثابت کنید که اگر مجموعه های A و B به قسمی باشند که $A \times B$ نامتناهی باشد، آنگاه یا A نامتناهی است یا B.

جواب: عکس نقیض این حکم را ثابت می کنیم. فرض کنیم A و B دو مجموعه ی متناهی باشند. اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$، آنگاه $A \times B = \emptyset$ و حکم ثابت است. اگر $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$، طبق قضیه ی ۴، A با $\mathbb{N}_k$ و B با $\mathbb{N}_{k'}$ در تناظر یک به یک است. در نتیجه می توان فرض کرد $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ و $B = \{b_1, b_2, \ldots b_{k'}\}$. تابع $f: A \to A \times \{b_i\}$، با ضابطه ی $f(a) = (a, b_i)$، دو سویی است. بنابراین طبق نتیجه ی قضیه ی ۲، $A \times \{b_i\}$، برای هر $1 \leq i \leq k'$، متناهی است. از طرفی $A \times B = \bigcup_{i=1}^{k'} A \times \{b_i\}$. چون $A \times B$، اجتماع متناهی از مجموعه های متناهی می باشد، طبق مسئله ی ۶، متناهی است و حکم ثابت می شود.

۱۴. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ و مجموعه های $A_1, A_2, \ldots, A_k$ به قسمی باشند که $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ نامتناهی باشد، آنگاه برای یک $j \in \mathbb{N}_k$، A_j نامتناهی است.

جواب: حکم را به استقراء ثابت می کنیم . برای دو مجموعه در تمرین قبل ثابت کردیم. فرض کنیم حکم برای $k-1$ مجموعه برقرار باشد. یعنی اگر $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$، $k-1$ مجموعه باشند به طوری که $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}$ نامتناهی باشد، آنگاه برای یک $j \in \mathbb{N}_{k-1}$، A_j نامتناهی است. حکم را برای k مجموعه ثابت می کنیم. فرض کنیم $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ نامتناهی باشد. تابع $f: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \to (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}) \times A_k$ باضابطه ی $f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}), a_k)$، یک تناظر یک به یک است. (دقت کنید که مجموعه ی $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}) \times A_k$ زوج مرتب هایی هستند که مؤلفه ی اول آنها $k-1$ تایی می باشد.) اثبات دو سویی بودن f ساده است. بنابراین طبق قضیه ی ۲، چون $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ نامتناهی است، مجموعه ی $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}) \times A_k$ نیز نامتناهی

است. بنابر پایه ی استقراء برای دو مجموعه، یا A_k نامتناهی است یا $A_۱ \times A_۲ \times \ldots \times A_{k-۱}$. اگر A_k نامتناهی باشد حکم ثابت می شود. اگر $A_۱ \times A_۲ \times \ldots \times A_{k-۱}$ نامتناهی باشد، آنگاه طبق فرض استقراء برای $k-۱$ مجموعه ، یکی از A_i ها $۱ \leq i \leq k-۱$ نامتناهی است که این حکم را ثابت می کند.

۱۷. ثابت کنید که مجموعه ی توانی یک مجموعه ی متناهی، متناهی است.

جواب: فرض کنیم A یک مجموعه ی متناهی و دارای n عنصر باشد. طبق قضیه ی **۳**، فصل **۲**، مجموعه ی توانی A یعنی $\mathcal{P}(A)$، دارای ۲^n عضو است. (اگر $A = \emptyset$ باشد نیز این گزاره درست است). لذا $\mathcal{P}(A) \sim \mathbb{N}_{۲^n}$ و این یعنی $\mathcal{P}(A)$ متناهی است.

تمرین ۵. ۲- صفحه ی ۱۲۴.

۴. ثابت کنید که اگر $(X-Y) \sim (Y-X)$، آنگاه $X \sim Y$.

جواب: فرض کنیم $f:(X-Y) \sim (Y-X)$. تابع $g: X \to Y$ را به صورت

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X-Y \\ x & x \in X \cap Y \end{cases}$$

تعریف می کنیم. این تابع دوسویی است.

برای اثبات یک به یکی ، فرض کنیم $g(x_۱) = g(x_۲)$. سه حالت را در نظر می گیریم و نشان می دهیم در هر حالت $x_۱ = x_۲$.

حالت ۱) $x_۱$ و $x_۲ \in X-Y$. در این حالت داریم:

$$g(x_۱) = g(x_۲) \xRightarrow{\text{طبق تعریف } g} f(x_۱) = f(x_۲) \xRightarrow{f \text{ یک به یک است}} x_۱ = x_۲$$

حالت ۲) $x_۱, x_۲ \in X \cap Y$. در این حالت داریم:

$$g(x_1) = g(x_2) \xrightarrow{\text{طبق تعریف} g} x_1 = x_2$$

حالت۳) $x_1 \in X - Y$، $x_2 \in X \cap Y$ (یا بر عکس، $x_1 \in X \cap Y$ و $x_2 \in X - Y$.) در این حالت داریم:

$$g(x_1) = g(x_2) \xrightarrow{\text{طبق تعریف} g} f(x_1) = x_2$$

و این غیر ممکن است زیرا $f(x_1) \in Y - X$ اما $x_2 \in X \cap Y$. لذا حالت ۳ اتفاق نمی افتد.

برای اثبات پوشایی، فرض کنیم $y \in Y$ دلخواه باشد. دو حالت داریم:

حالت ۱) $y \in Y - X$. در این حالت چون f پوشا است داریم:

$$\exists x \in X - Y \ s.t \ f(x) = y \xrightarrow{\text{طبق تعریف} g} \exists x \in X \ s.t \ g(x) = y$$

لذا g در این حالت پوشاست.

حالت۲) $y \in X \cap Y$. در این حالت $g(y) = y$ و لذا g در این حالت هم پوشاست.

۶. ثابت کنید که اگر X یک مجموعه ی شمارای نامتناهی و Y یک زیر مجموعه ی متناهی X باشد،آنگاه $X - Y$ شمارای نامتناهی است. (با مسئله ی ۸، تمرین ۵. ۱ مقایسه کنید.)

جواب: فرض کنیم X یک مجموعه ی شمارای نامتناهی و Y یک زیر مجموعه ی متناهی از X باشد. طبق مسئله ی ۸ تمرین ۵. ۱ ، $X - Y$ نامتناهی است. چون $X - Y$ یک زیر مجموعه ی نامتناهی از مجموعه ی شمارای نامتناهی X است، طبق قضیه ی ۸، شمارای نامتناهی است.

۷. ثابت کنید که اگر X یک مجموعه ی شمارای نامتناهی و Y یک مجموعه ی متناهی باشد، آنگاه $X \cup Y$ شمارای نامتناهی است.

جواب: فرض کنیم X یک مجموعه ی شمارای نامتناهی و Y یک مجموعه ی متناهی باشد. اگر $Y = \emptyset$، آنگاه به وضوح حکم برقرار است. فرض کنیم $Y \neq \emptyset$. بدون آنکه از کلیت برهان کاسته شود، فرض کنیم $X \cap Y = \emptyset$. (زیرا اگر $X \cap Y \neq \emptyset$، آنگاه قرار می دهیم $Y' = Y - X$. در نتیجه $X \cup Y = X \cup Y'$ و $X \cap Y' = \emptyset$) چون Y متناهی است $\exists k \in \mathbb{N}\ s.t\ Y\sim\mathbb{N}_k (*)$. از طرفی $X\sim\mathbb{N}$. طبق تمرین قبل، $\mathbb{N} - \mathbb{N}_k$ شمارای نامتناهی است لذا $\mathbb{N} - \mathbb{N}_k\sim\mathbb{N}\ (**)$. خاصیت تعدی همتوانی ایجاب می کند که $X\sim\mathbb{N} - \mathbb{N}_k$. چون $X \cap Y = \emptyset$ و $(\mathbb{N} - \mathbb{N}_k) \cap \mathbb{N}_k = \emptyset$ از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می گیریم $(\mathbb{N} - \mathbb{N}_k) \cup \mathbb{N}_k \sim X \cup Y$ و این یعنی $\mathbb{N}\sim X \cup Y$. در نتیجه $X \cup Y$ شمارای نامتناهی است.

۸. ثابت کنید که مجموعه ی تمام اعداد طبیعی زوج $\mathbb{N}_e$ و مجموعه ی تمام اعداد طبیعی فرد $\mathbb{N}_o$ شمارای نامتناهی اند.

جواب: توابع $\begin{cases} f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_e \\ x \to ۲x \end{cases}$ و $\begin{cases} g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_o \\ x \to ۲x - ۱ \end{cases}$ دو سویی هستند. لذا $\mathbb{N}_e \sim \mathbb{N}$ و $\mathbb{N}_o\sim\mathbb{N}$ و این یعنی $\mathbb{N}_o$ و $\mathbb{N}_e$ شمارای نامتناهی اند.

۹. گیریم A یک مجموعه ی غیر تهی و 2^A، مجموعه ی تمام توابع از مجموعه ی A به مجموعه ی $\{0, 1\}$ است. ثابت کنید $\mathcal{P}(A)\sim 2^A$.

جواب: تابع $f: \mathcal{P}(A) \to ۲^A$ را به صورت $f(B) = \chi_B$،که در آن B زیر مجموعه ای از A است، تعریف می کنیم. این تابع، دو سویی است.

اثبات پوشایی: فرض کنیم $g \in ۲^A$. یعنی g تابعی از A به $\{۰,۱\}$است. قرار می دهیم $B = \{x \in A | g(x) = ۱\}$. بنابراین ضابطه ی g به صورت زیر است:

$$g(x)=\begin{cases} ۱ & x \in B \\ ۰ & x \in A \backslash B \end{cases}$$

می شود که این همان ضابطه ی χ_B است. داریم $f(B) = \chi_B = g$، لذا f پوشاست.

یک به یک بودن f: $\quad f(B_۱) = f(B_۲) \xrightarrow{\text{طبق تعریف } f} \chi_{B_۱} = \chi_{B_۲}$

باید نشان دهیم که $B_۱ = B_۲$. فرض کنیم $x \in B_۱$. در نتیجه $\chi_{B_۱}(x) = ۱$. چون $\chi_{B_۱} = \chi_{B_۲}$، نتیجه می گیریم $\chi_{B_۲}(x) = ۱$ که طبق تعریف $\chi_{B_۲}$، ایجاب می کند $x \in B_۲$. نشان دادیم $B_۱ \subseteq B_۲$. با استدلالی مشابه نتیجه می گیریم $B_۲ \subseteq B_۱$، لذا $B_۱ = B_۲$.

۱۰. گیریم X یک مجموعه ی شمارای نامتناهی و Y یک زیر مجموعه ی نامتناهی X باشد. فرض کنیم که $g: X \sim \mathbb{N}$، و گیریم $h: Y \to \mathbb{N}$ با

$$\boldsymbol{h(y) = \text{تعداد عنصرهای } \{1, 2, 3, \dots, g(y)\} \cap g(Y)}$$

تعریف شده است. ثابت کنید که h یک تناظر یک به یک است و بنابراین Y شمارای نامتناهی است.

جواب: این تمرین در آخر کتاب پاسخ داده شده است. ما در اینجا اثبات دیگری برای پوشایی h بیان می‌کنیم. چون تابع g، دو سویی است، $g|Y : Y \to g(Y)$ نیز دو سویی است. طبق قضیه ی ۲، $g(Y)$ یک زیر مجموعه ی نامتناهی از $\mathbb{N}$ است. بنا بر قضیه ی ۸، $g(Y)$ شمارای نامتناهی است . فرض کنیم $g(Y) = \{n_۱, n_۲, n_۳, \dots\}$ باشد. عدد طبیعی $k \in \mathbb{N}$ را دلخواه بگیرید. برای اثبات پوشایی h باید عنصری مانند $y \in Y$ معرفی کنیم به طوری که $h(y) = k$. چون $n_k \in g(Y)$ نتیجه می گیریم:

$$\exists y \in Y \ \ s.t \ \ g(y) = n_k$$

حال مجموعه ی $\{۱,۲, \dots g(y)\} \cap g(Y)$ را در نظر می گیریم. این مجموعه دقیقاً برابر با مجموعه ی $\{n_۱, n_۲, \dots, n_k\}$ می باشد که تعداد عناصر آن k تا می باشد، لذا $h(y) = k$. در نتیجه h پوشاست.

۱۲. گیریم اعدادحقیقی a، b، c و d به قسمی هستند که $a < b$ و $c < d$. ثابت کنید:

الف) $[0,1] \sim (0,1]$

ب) $[a,b] \sim (c,d]$

ج) $(c,d] \sim [c,d)$

الف) قرار می دهیم $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$. مجموعه ی A، شمارای نامتناهی است، زیرا $f: \mathbb{N} \to A$ با ضابطه ی $f(n) = \frac{1}{n}$، یک تابع دو سویی است. طبق مسئله ی ۷، $A \cup \{0\}$ شمارای نامتناهی است، یعنی $A \cup \{0\} \sim \mathbb{N} \sim A$. از طرفی $(0,1] - A \sim (0,1] - A$. همچنین داریم $[(0,1] - A] \cap [A \cup \{0\}] = \emptyset$ و $[(0,1] - A] \cap A = \emptyset$. در نتیجه طبق مسئله ی ۵، $(A \cup \{0\}) \cup ((0,1] - A) \sim A \cup ((0,1] - A)$. بنابراین $[0,1] \sim (0,1]$.

ب) $f: (0,1] \to (c,d]$ با ضابطه ی $f(x) = c + (d-c)\,x$ یک تابع دوسویی است، لذا $(c,d] \sim (0,1]$. از طرفی طبق تمرین ۱۱، $[a,b] \sim [0,1]$ و طبق قسمت الف، $[0,1] \sim (0,1]$. از موارد فوق نتیجه می شود $[a,b] \sim [0,1] \sim (0,1] \sim (c,d]$. قانون تعدی نتیجه می دهد $[a,b] \sim (c,d]$ و اثبات کامل می شود.

ج) $f: (c,d] \to [c,d)$ با ضابطه ی $f(x) = -x + d + c$ یک تابع دو سویی است، لذا $(c,d] \sim [c,d)$

۱۳. با فرضهای مسئله ی ۱۲، ثابت کنید:

الف) $[0,1] \sim (0,1)$

ب) $[a,b] \sim (c,d)$

ج) $[a,b] \sim (c,d]$

جواب: الف) ابتدا نشان می دهیم $(۰,۱]\sim(۰,۱)$. مجموعه ی $A=\{\frac{۱}{n}|n\in\mathbb{N}\}$، بنا بر استدلال تمرین قبل، شمارای نامتناهی است. لذا طبق تمرین ۶، $A-\{۱\}$ نیز شمارای نامتناهی است. یعنی $A-\{۱\}\sim\mathbb{N}\sim A$. از طرفی $((۰,۱]-A)\sim((۰,۱)-A)$. همچنین $(A-\{۱\})\cap((۰,۱]-A)=\emptyset$ و $A\cap((۰,۱]-A)=\emptyset$. لذا طبق تمرین **۵** داریم:

$$((۰,۱]-A)\cup A\sim((۰,۱]-A)\cup(A-\{۱\})$$

و این یعنی $(۰,۱]\sim(۰,۱)$ $(*)$. از $(*)$ و تمرین (**۱۲**- الف) نتیجه می گیریم $[۰,۱]\sim(۰,۱)$ و حکم ثابت می شود.

ب) داریم

$$[a,b]\overset{\text{تمرین ۱۱}}{\sim}[۰,۱]\overset{\text{تمرین ۱۳}}{\sim}(۰,۱)\overset{\text{تمرین ۱۱}}{\sim}(c,d)$$

لذا $[a,b]\sim(c,d)$.

تمرین ۵. ۳- صفحه ی ۱۲۷.

۱. حکم مثال ۴ را ثابت کنید: مجموعه ی تمام اعدادصحیح $\mathbb{Z}$ شمارای نامتناهی است.

جواب:گیریم $\mathbb{Z}_+$، مجموعه ی تمام اعداد صحیح مثبت و $\mathbb{Z}_-$، مجموعه ی اعداد صحیح منفی باشد. می دانیم $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_+\cup\{۰\}\cup\mathbb{Z}_-$. چون $f:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_-$ با ضابطه ی $f(n)=-n$ یک تابع دو سویی است، $\mathbb{Z}_+\sim\mathbb{Z}_-$. از طرفی $\mathbb{Z}_+$ که همان مجموعه ی اعداد طبیعی است ، شمارای نامتناهی می باشد. لذا $\mathbb{Z}_-$ نیز شمارای نامتناهی است. طبق قضیه ی ۹، $\mathbb{Z}_+\cup\mathbb{Z}_-$ شمارای نامتناهی است. بنا به تمرین ۷ ، بخش **۲.۵**، چون $\{۰\}$ متناهی است نتیجه می گیریم $\mathbb{Z}_+\cup\{۰\}\cup\mathbb{Z}_-$ شمارای نامتناهی و این یعنی $\mathbb{Z}$ شمارای نامتناهی است.

۲. نتیجه ی قضیه ی ۹ را ثابت کنید.

جواب: اثبات به استقراء. طبق قضیه ی ۹، حکم برای دو مجموعه برقرار است. فرض کنیم حکم برای هر $n-1$ مجموعه برقرار باشد، یعنی اگر $A_1, \dots, A_{n-1}$ ، $n-1$ مجموعه ی شمارای نامتناهی باشند، آنگاه $\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ شمارای نامتناهی است. نشان می دهیم حکم برای n مجموعه ی دلخواه نیز برقرار است. فرض کنیم $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ ، n مجموعه شمارای نامتناهی باشند. طبق فرض استقراء، $\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ شمارای نامتناهی است. حال بنا بر پایه ی استقراء $\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \cup A_n$ شمارای نامتناهی است و این یعنی $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ شمارای نامتناهی است.

۳. ثابت کنید که اجتماع تعدادی متناهی از مجموعه های شما را ، شماراست.

جواب: فرض کنیم $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ تعداد ی متناهی مجموعه ی شمارا باشند. سه حالت را در نظر می گیریم:

حالت ۱) همه ی مجموعه های فوق متناهی باشند. در این حالت، طبق تمرین ۶ ، بخش ۱۵.، $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ متناهی است، لذا بنابر تعریف مجموعه ی شمارا، $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ شماراست.

حالت ۲) همه ی مجموعه های فوق ، شمارای نامتناهی باشند. در این حالت، طبق نتیجه ی قضیه ی ۹، $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ شمارای نامتناهی است، لذا بنابر تعریف مجموعه ی شمارا، $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ شماراست.

حالت۳) تعدادی از این مجموعه ها، شمارای نامتناهی و تعدادی از آنها متناهی باشند. بدون آنکه از کلیت مسأله کاسته شود، فرض کنیم $A_1, \dots, A_k$، شمارای نامتناهی و $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$، متناهی باشند. طبق تمرین ۶، بخش ۵. ۱ ، $\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i$ متناهی و طبق قضیه ی ۹، $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ شمارای نامتناهی است. بنابر تمرین ۷، بخش ۵. ۲. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup \bigcup_{i=k+1}^{n} A_i$ ، شمارای نامتناهی است و این یعنی $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ شمارای نامتناهی است.

۴. ثابت کنید که اگر A و B مجموعه های شمارای نامتناهی باشند، $A \times B$ نیز شمارای نامتناهی است، بخصوص $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$، $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی هستند.

جواب: چون A و B مجموعه های شمارای نامتناهی اند، توابع دوسویی $f: A \to \mathbb{N}$ و $g: B \to \mathbb{N}$ وجود دارند. $h: A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را به صورت $h(x,y) = (f(x), g(y))$، تعریف می کنیم. h یک تابع دوسویی است.

برای اثبات پوشایی h، فرض کنیم $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ دلخواه باشد. چون f و g پوشا هستند

نتیجه می گیریم:

$$\exists\, a \in A \wedge \exists\, b \in B \ \ s.t \ \ f(a) = m \wedge g(b) = n$$

در نتیجه :
$$h(a,b) = (f(a), g(b)) = (m,n)$$

برای اثبات یک به یکی h، فرض کنیم $h(x,y) = h(x',y')$. از تعریف h، نتیجه می گیریم:

$$\big(f(x), g(y)\big) = \big(f(x'), g(y')\big) \Longrightarrow f(x) = f(x') \wedge g(y) = g(y')$$

$$\xRightarrow{\text{یک به یک اند } g \text{و} f} x = x' \wedge y = y' \Longrightarrow (x,y) = (x',y')$$

بنابراین $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. از طرفی طبق قضیه ی ۱۰، $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. بنابراین $A \times B \sim \mathbb{N}$ و اثبات کامل است.

۵. یک تابع یک به یک $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ پیدا کنید و برهان دیگری برای مثال ۵ بیاورید.

جواب: $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ را با ضابطه ی $f(\frac{p}{q}) = (p,q)$ تعریف می کنیم. f در حالت کلی تابع نیست زیرا اگر دو کسر $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۶}$ را در نظر بگیریم، ملاحظه می شود که $f(\frac{۲}{۳}) = (۲,۳)$

و $(۴,۶) = (\frac{۴}{۶})f$. در نتیجه $f\left(\frac{۴}{۶}\right) \neq f(\frac{۲}{۳})$ در حالی که $\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶}$ و این نتیجه می دهد که f تابع نیست. برای اینکه f تابع باشد هر عدد گویا را به شکل منحصر به فرد $\frac{p}{q}$، که در آن $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}$ و $(p,q) = ۱$ نمایش می دهیم. (یعنی بزرگترین مقسوم علیه ی مشترک p و q برابر ۱ است). بنابراین با این فرض، $f(\frac{۲}{۳}) = f(\frac{۴}{۶}) = (۲,۳)$. نشان می‌دهیم f یک به یک است. فرض کنیم $\frac{p_۱}{q_۱}, \frac{p_۲}{q_۲} \in \mathbb{Q}$ که در آن $(p_۱, q_۱) = ۱$ و $(p_۲, q_۲) = ۱$ و $f(\frac{p_۱}{q_۱}) = f(\frac{p_۲}{q_۲})$. بنابراین

$$(p_۱, q_۱) = (p_۲, q_۲) \Longrightarrow p_۱ = p_۲ \ \wedge \ q_۱ = q_۲ \Longrightarrow \frac{p_۱}{q_۱} = \frac{p_۲}{q_۲}$$

در نتیجه f یک به یک است. لذا $\mathbb{Q} \sim f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. از طرفی $\mathbb{Z} \times \{۱\} \subseteq f(\mathbb{Q})$ (زیرا فرض کنیم $(z,۱) \in \mathbb{Z} \times \{۱\}$ دلخواه باشد داریم $f(z) = f(\frac{z}{۱}) = (z,۱)$.) در نتیجه طبق قضیه ی (۱-الف)، $f(\mathbb{Q})$ نامتناهی است. چون $f(\mathbb{Q})$ زیر مجموعه ای نامتناهی از مجموعه ی شمارای نامتناهی $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ است، طبق قضیه ی ۸، شمارای نامتناهی است. بنابراین $\mathbb{Q}$ که همتوان با $f(\mathbb{Q})$ می باشد نیز شمارای نامتناهی است.

۶. ثابت کنید که مجموعه ی تمام دایره های واقع در صفحه ی دکارتی که شعاعهایشان اعداد گویا و مختصات مرکزهایشان اعداد گویا هستند، شمارای نامتناهی است.

جواب: فرض کنیم $\mathcal{C}$، مجموعه ی تمام دایره های واقع در صفحه ی دکارتی باشد که شعاعهایشان و مختصات مرکزهایشان اعداد گویا هستند. $f: \mathcal{C} \to (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}$ را با ضابطه ی $f(C) = ((x,y),r)$ تعریف می کنیم، که در آن (x,y) مرکز دایره ی C و r، شعاع آن است. (توجه کنید که $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}$ مجموعه ی زوج مرتب هایی است که مختص اول آنها زوج مرتب و مختص دوم آنها عددی گویاست.) f یک تابع یک به یک است، زیرا فرض کنیم C، دایره ای به مرکز (x,y) و شعاع r و C' دایره ای به مرکز (x',y') و شعاع r' باشد به طوری که $f(C) = f(C')$. در نتیجه

$$((x,y),r)=((x',y'),r') \Longrightarrow (x,y)=(x',y') \wedge r=r'$$

و این یعنی دو دایره ی C و C' دارای مرکز و شعاع یکسان اند و لذا $C=C'$. (یعنی دو دایره بر هم منطبق اند.) از طرفی $f(\mathcal{C})=(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\times(\mathbb{Q}^{+})$ (زیرا اگر شعاع صفر باشد دایره ای تشکیل نخواهد شد). بنابراین $f(C)$ نامتناهی است.از طرفی طبق تمرین ۴ در همین بخش، $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\times\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است. لذا بنابر قضیه ی ۸، $f(\mathcal{C})$ شمارای نامتناهی است. در نتیجه مجموعه ی $\mathcal{C}$ یعنی دایره های با مرکز و شعاع گویا، شمارای نامتناهی است. (زیرا $\mathcal{C}\sim f(\mathcal{C})$).

۸. ثابت کنید که اگر X یک مجموعه ی شمارا و $f:X\longrightarrow Y$ یک سورژکسیون باشد، آنگاه Y شماراست.

جواب: چون f سورژکسیون (پوشا) می باشد، به ازای هر $y\in Y$ داریم $f^{-1}(y)\neq\emptyset$. برای هر $y\in Y$، عنصر دلخواهی از مجموعه ی $f^{-1}(y)$ انتخاب نموده و آن را x_y می نامیم. قرار می دهیم $X'=\{x_y\ |y\in Y\}$. حال $g:X'\longrightarrow Y$ با ضابطه ی $g(x_y)=y$ یک تابع دوسویی است. از آنجاییکه X' زیرمجموعه ای از X است و X شمارا می باشد، نتیجه می گیریم X' نیز شماراست. بنابراین Y شماراست.

۹. ثابت کنید که هر مجموعه ی شمارای نامتناهی X یک زیر مجموعه ی شمارای نامتناهی مانند Y دارد به طوری که $X-Y$ شمارای نامتناهی است.

جواب: فرض کنیم مجموعه ی X شمارای نامتناهی باشد. بنابراین تابع دوسویی $f:\mathbb{N}\to X$ وجود دارد. مجموعه ی $Y=\{f(۲k)|k\in\mathbb{N}\}$ یک زیرمجموعه ی شمارای نامتناهی از X است، زیرا $g:\mathbb{N}\to Y$ با ضابطه ی $g(k)=f(۲k)$، یک تابع دوسویی است. از طرفی توجه کنید که

$$X=\{f(۲k)|\ k\in\mathbb{N}\}\cup\{f(۲k+۱)|\ k\in\mathbb{N}\}.$$

در نتیجه $X-Y=\{f(۲k+۱)\mid k\in\mathbb{N}\}$. چون $h:\mathbb{N}\to X-Y$ با ضابطه ی $h(k)=f(۲k+۱)$، یک تابع دو سویی است، لذا $X-Y$ شمارای نامتناهی است و حکم ثابت است. (اثبات دوسویی بودن توابع فوق آسان است.)

۱۰. ثابت کنید که مجموعه ی تمام چند جمله ایهای $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ با ضرایب صحیح، شمارای نامتناهی است.

جواب: فرض کنیم برای هر $k\in\mathbb{N}$، A_k مجموعه ی تمام چند جمله ایهای از درجه ی k به صورت $a_۰x^k+a_۱x^{k-۱}+\cdots+a_k$ با ضرایب صحیح و $a_۰\neq ۰$ باشد. $f:A_k\to\overbrace{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}}^{k+۱\text{ بار}}$ با ضابطه ی $f(p(x))=(a_۰,a_۱,\ldots,a_k)$، که در آن $p(x)$ یک چند جمله ای از درجه ی k و $a_۰,a_۱,\ldots,a_k$، ضرایب این چند جمله ای می باشند، یک تابع دوسویی است. (اثبات دو سویی بودن سر راست است.) لذا $A_k\sim\overbrace{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}}^{k+۱\text{ بار}}$. بنابراین A_k شمارای نامتناهی است. بنابر نتیجه ی قضیه ۱۰، $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$ شمارای نامتناهی است.

۱۱. عدد جبری، بنابر تعریف، هر ریشه ی حقیقی معادله ی $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ با ضرایب صحیح است. ثابت کنید که مجموعه ی تمام اعداد جبری، شمارای نامتناهی است.

جواب: فرض کنیم $R_۱$ مجموعه ی ریشه های تمامی چند جمله ایهای از درجه ی ۱، $R_۲$ مجموعه ی ریشه های چند جمله ایهای از درجه ی ۲،... و R_n مجموعه ی ریشه های چند جمله ایهایی از درجه ی n باشد. چون تعداد چند جمله ایهای از درجه ی n، شمارای نامتناهی است و هر چند جمله ای از درجه ی n بنا به قضیه ی اساسی جبر، حداکثر n ریشه دارد، لذا R_n شمارای نامتناهی است. طبق نتیجه ی قضیه ی ۱۰، $R=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}R_n$ شمارای نامتناهی است. حال فرض کنیم A، مجموعه ی تمام اعداد جبری باشد. چون هر عدد طبیعی $n\in\mathbb{N}$، ریشه ی معادله ی

$x - n = \circ$ است، نتیجه می گیریم که $\mathbb{N} \subseteq A$. بنابراین طبق قضیه ی (۱-الف) A نامتناهی است. از قضیه ی ۸، نتیجه می گیریم A شمارای نامتناهی است.

۱۲. ثابت کنید که مجموعه ی تمام زیر مجموعه های متناهی یک مجموعه ی شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

جواب: فرض کنیم A یک مجموعه ی شمارای نامتناهی باشد. می توان فرض کرد $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, \dots\}$. برای هر $k \in \mathbb{N}$، تعریف می کنیم:

$$A_k = \{X \subseteq A | \text{دارای } k \text{ عضو است } X\}.$$

(یعنی A_k مجموعه ی تمام زیر مجموعه های k عضوی A است.) هر A_k شمارای نامتناهی

است، زیرا $f: A_k \to \overbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}^{k \text{بار}}$، با ضابطه ی $f(\{a_{i_۱}, a_{i_۲}, \dots, a_{i_k}\}) = (a_{i_۱}, \dots, a_{i_k})$، که در آن $i_۱ < i_۲ < \dots < i_k$، یک تابع یک به یک می باشد. بنابراین $A_k \sim f(A_k) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$. چون A_k نامتناهی است (زیرا اگر A_k متناهی باشد، نتیجه می شود که A نیز متناهی است و این تناقض است) $f(A_k)$ نیز نامتناهی است. لذا $f(A_k)$ زیر مجموعه ای نامتناهی از یک مجموعه ی شمارای نامتناهی می باشد. طبق قضیه ی ۸، $f(A_k)$ شمارای نامتناهی است که نتیجه می دهد A_k نیز باید شمارای نامتناهی باشد. نتیجه ی قضیه ی ۱۰ ایجاب می کند که $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ شمارای نامتناهی است.

تمرین ۵. ۴- صفحه ی ۱۳۰.

۱. گیریم A و B دو مجموعه ی همتوان هستند. ثابت کنید که اگر A ناشمارا باشد، B نیز ناشمارا است.

جواب: فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند به قسمی که A ناشمارا و $A \sim B$. به برهان خلف، فرض کنیم B شمارا باشد. بنا به تعریف، مجموعه ی B شمارای نامتناهی یا متناهی است. چون

$A \sim B$، نتیجه می گیریم A نیزشمارای نامتناهی یا متناهی است و این تناقض است، زیرا فرض این است که A ناشماراست.

۲. ثابت کنید که هر فوق مجموعه ی یک مجموعه ی ناشمارا، ناشماراست.

جواب: فرض کنیم A یک مجموعه ی ناشمارا و B فوق مجموعه ی A باشد (یعنی $A \subseteq B$).به برهان خلف، فرض کنیم B شمارا باشد.طبق قضیه ی ۸، باید A شمارا باشد و این تناقض است. لذا فرض خلف باطل و B ناشماراست.

۳. با استفاده از نتیجه ی مسئله ی ۲ی بالا، برهان دیگری برای نتیجه ی قضیه ی ۱۲، بیاورید.

جواب: در قضیه ی ۱۲، ثابت شد که بازه ی $(۰,۱)$ ناشماراست. از طرفی $(۰,۱) \subseteq \mathbb{R}$، یعنی $\mathbb{R}$ فوق مجموعه ی $(۰,۱)$ است. طبق مسئله ی ۲ ، $\mathbb{R}$ ناشماراست.

۵. عدد متعالی، بنابر تعریف، یک عدد حقیقی غیر جبری است.(مسئله ی ۱۱، تمرین ۵. ۳ را ببینید.) ثابت کنید که مجموعه ی تمام اعداد متعالی ناشماراست.

جواب: ثابت شد که اعداد جبری شماراست. به برهان خلف، فرض کنیم اعداد غیر جبری نیز، شمارا باشند. از آنجایی که اجتماع دو مجموعه ی شمارا، شماراست، اجتماع اعداد جبری و اعداد غیر جبری شماراست. در نتیجه مجموعه ی اعداد حقیقی باید شمارا باشد، زیرا اعداد حقیقی از اعداد جبری به انضمام اعداد غیر جبری تشکیل شده است و این تناقض است. لذا فرض خلف باطل و اعداد غیر جبری ناشمارا هستند.

۶. گیریم $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 1\}$. ثابت کنید $S^1 \sim \mathbb{R}$ و از اینرو ناشماراست.

جواب: $S^۱$، مجموعه ی تمام نقاط واقع بر دایره ای به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۱است. نشان می دهیم نیم دایره ی بالایی، یعنی مجموعه ی $T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^۲ + y^۲ =$

$\{ \cdot \geq y , ۱$، ناشماراست. با ضابطه ی $f: T \to [-۱,+۱]$ با ضابطه ی $f(x,y) = x$، یک تابع دو سویی است.

برای اثبات پوشایی f، فرض کنیم $x \in [-۱,+۱]$ دلخواه باشد. زوج مرتب $(x, \sqrt{۱ + x^۲})$ در مجموعه ی T است، زیرا $\sqrt{۱ - x^۲} \geq ۰$ و به علاوه $x^۲ + (\sqrt{۱ - x^۲})^۲ = x^۲ + ۱ - x^۲ = ۱$. همچنین داریم $f(x, \sqrt{۱ - x^۲}) = x$. لذا f پوشاست.

اثبات یک به یکی : فرض کنیم $f(x_۱, y_۱) = f(x_۲, y_۲)$. در نتیجه طبق تعریف f، $x_۱ = x_۲ (*)$. از طرفی چون $(x_۱, y_۱) \in T$، نتیجه می گیریم $y_۱ = \sqrt{۱ - x_۱^۲}$. به همین صورت $y_۲ = \sqrt{۱ - x_۲^۲}$. از $x_۱ = x_۲$ نتیجه می گیریم $y_۱ = y_۲ (**)$. روابط (*) و (**) ایجاب می کنند $(x_۱, y_۱) = (x_۲, y_۲)$، لذا f یک به یک است.

نشان دادیم f دوسویی است، بنابراین $T \sim [-۱,+۱]$. چون $\mathbb{R} \sim [-۱,+۱]$، بنا به تمرین ۱، T ناشماراست. از آنجایی که $S^۱$ فوق مجموعه ی T می باشد ، طبق تمرین **۲**، ناشماراست.

۷. ثابت کنید که مجموعه ی A ناشماراست اگر و تنها اگر $A \times A$ ناشمارا باشد.

جواب: حکم معادل را ثابت می کنیم. نشان می دهیم A شماراست اگر و تنها اگر $A \times A$ شمارا باشد. اگر A شمارا باشد،آنگاه یا متناهی است یا شمارای نامتناهی. اگر A متناهی باشد، آنگاه طبق تمرین **۱۲**، بخش **۵. ۱** ، $A \times A$ متناهی است. اگر A شمارای نامتناهی باشد، آنگاه طبق تمرین **۴**، بخش **۵. ۳**، $A \times A$ شمارای نامتناهی است. لذا اگر A شمارا باشد $A \times A$ شماراست.

برعکس، فرض کنیم $A \times A$ شمارا باشد. بنابراین یا متناهی است یا شمارای نامتناهی. اگر $A \times A$ متناهی باشد، آنگاه طبق تمرین **۴** ، بخش**۵. ۱**، A متناهی است. اما اگر $A \times A$ شمارای نامتناهی باشد، آنگاه یک تابع دو سویی $f: A \times A \to \mathbb{N}$ وجود دارد. $g: A \to \mathbb{N}$ با ضابطه ی $g(a) = f(a,a)$، یک تابع یک به یک است.(اثبات یک به یک بودن g

سراست است.) لذا $A \sim g(A)$. از طرفی چون $A \times A$ نامتناهی است، A نیز نامتناهی می باشد و چون $A \sim g(A)$، نتیجه می شود که $g(A)$ نیز نامتناهی است. طبق قضیه ی ۸، $g(A)$ شمارای نامتناهی خواهد بود.(زیرا زیر مجموعه ای نامتناهی از مجموعه ی شمارای نامتناهی $\mathbb{N}$ است). چون $A \sim g(A)$، باید A شمارای نامتناهی باشد.

۸. ثابت کنید که اگر مجموعه های A و B به قسمی باشند که $A \times B$ ناشمارا باشد، آنگاه یا A یا B ناشماراست.

جواب: عکس نقیض این حکم را ثابت می کنیم. فرض کنیم A و B شمارا باشند. باید ثابت کنیم $A \times B$ شماراست. ۳ حالت در نظر می گیریم:

حالت ۱) هر دو مجموعه، متناهی باشند. اگر A و B متناهی باشند، آنگاه طبق تمرین ۱۳، بخش ۵. ۱، $A \times B$ متناهی است و لذا شماراست.

حالت ۲) یکی از دو مجموعه، متناهی و دیگری شمارای نامتناهی باشد. بدون آنکه کلیت مسئله کاسته شود فرض کنیم A متناهی و B شمارای نامتناهی باشد. داریم $A \times B = \bigcup_{a \in A}(\{a\} \times B)$. از آنجایی که $(\{a\} \times B)$ برای هر $a \in A$ شماراست، طبق تمرین ۳، بخش ۵. ۳، $A \times B$ شماراست.

حالت ۳) هر دو مجموعه، شمارای نامتناهی باشند. در اینصورت طبق تمرین ۴، بخش ۵. ۳، $A \times B$ شمارای نامتناهی است. لذا $A \times B$ شماراست.

۹. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ و مجموعه های $A_1, A_2, \dots, A_k$ به قسمی باشند که $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ ناشمارا باشد، آنگاه $j \in \mathbb{N}_k$ وجود دارد به قسمی که A_j ناشماراست.

جواب: اثبات به استقراء روی k. طبق تمرین ۸، حکم برای $k = 2$ برقرار است. (پایه ی استقراء.) فرض کنیم حکم برای k مجموعه برقرار باشد. یعنی اگر $k \in \mathbb{N}$ و

$A_1, A_2, \dots, A_k$، مجموعه هایی باشند به قسمی که $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ ناشمارا باشد، آنگاه $j \in \mathbb{N}_k$ وجود دارد به طوری که A_j ناشماراست. حکم را برای $k+1$ مجموعه ثابت می کنیم. فرض کنیم $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$، مجموعه های باشند به قسمی که $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \times A_{k+1}$ ناشمارا باشد. به آسانی می توان بررسی نمود که :

$$f: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \times A_{k+1} \to (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) \times A_{k+1}$$

با ضابطه ی $f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}) = ((a_1, a_2, \dots, a_k), a_{k+1})$ یک تابع دوسویی است.(توجه کنید که مجموعه ی $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) \times A_{k+1}$، مجموعه ای از زوج مرتب هاست که مؤلفه ی اول آنها یک k تایی مرتب و مؤلفه ی دوم آنها عنصری از مجموعه ی A_{k+1} است.) اثبات دو سویی بودن f سر راست است. در نتیجه طبق تمرین ۱، همین بخش، $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) \times A_{k+1}$ نیز ناشماراست. بنا به پایه ی استقراء، یا A_{k+1} ناشماراست یا $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$. اگر A_{k+1} ناشمارا باشد، حکم ثابت است، اما اگر $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ ناشمارا باشد، طبق فرض استقراء $j \in \mathbb{N}_k$ وجود دارد به طوری که A_j ناشماراست و برهان کامل می شود.

۱۰. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ و مجموعه های $A_1, A_2, \dots, A_k$ به قسمی باشند که $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ ناشمارا باشد، آنگاه یک $j \in \mathbb{N}_k$ وجود دارد به قسمی که A_j ناشماراست.

جواب: عکس نقیض این حکم را در تمرین ۳، بخش ۵. ۳ ، ثابت کرده ایم.

فصل پنجم

اعداد اصلی و حساب اعداد اصلی

تمرین ۶. ۱- صفحه ی ۱۳۲.

۱. نشان دهید که اعداد طبیعی، اعداد اصلی هستند.

جواب: فرض کنیم k یک عدد طبیعی باشد. مجموعه ی $\mathbb{N}_k = \{۱,۲, \dots k\}$ را در نظر می گیریم. $\mathbb{N}_k$ متناهی است. بنابراین طبق قاعده ی (الف-۳) ، $card\ \mathbb{N}_k = k$. در نتیجه k یک عدد اصلی است.

۳. نشان دهید که $card\ \mathbb{N} = card\ \mathbb{Z} = card\ \mathbb{Q} = card\ \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

جواب: بنابر مثال ۵ (بخش ۵. ۳) و تمرینات ۱ و ۴ (همان بخش)، $\mathbb{Q}$ ،$\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی اند، یعنی $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{Z}$. لذا طبق قاعده ی (الف-۴) داریم:

$$card\ \mathbb{N} = card\ \mathbb{Z} = card\ \mathbb{Q} = card\ \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

۴. فرض کنیم A یک مجموعه باشد و x عنصر A نباشد. ثابت کنید که اگر $card\ (A \cup \{x\}) = card\ A$ ، آنگاه A نامتناهی است.

جواب: فرض کنیم $card\ (A \cup \{x\}) = card\ A$. در نتیجه $A \sim A \cup \{x\}$. بنابراین $A \cup \{x\}$ با زیر مجموعه ی سره ی خود یعنی A همتوان شده است و این طبق تعریف، نتیجه می دهد که $A \cup \{x\}$ نامتناهی است. قضیه ۳، بخش ۵. ۱ ، ایجاب می کند که A نامتناهی است.

۵. آیا عکس مسئله ی ۴ درست است؟

جواب: بلی. فرض کنیم A یک مجموعه ی نامتناهی باشد و $x \notin A$. بنابر قضیه ی ۱۱، بخش ۵. ۳، A زیرمجموعه ای مانند B دارد که شمارای نامتناهی است. تمرین ۷، بخش ۵. ۲ ، ایجاب می کند که $B \cup \{x\}$، نیز شمارای نامتناهی است. در نتیجه تابع دوسویی $g: B \cup \{x\} \sim B$ وجود دارد. $f: A \cup \{x\} \longrightarrow A$ را با ضابطه ی
$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in B \cup \{x\} \\ x & x \in A \setminus B \end{cases}$ تعریف می کنیم. به آسانی می توان بررسی نمود که

f یک تابع دوسویی است، لذا $A \cup \{x\} \sim A$.

۶. ثابت کنید که اگر $card\ A = card\ B = card\ \mathbb{N}$، آنگاه $card\ A \cup B = card\ B$.

جواب: از $card\ A = card\ B = card\ \mathbb{N}$، نتیجه می شود $A \sim B \sim \mathbb{N}$، یعنی A و B شمارای نامتناهی اند. طبق قضیه ی ۹، بخش ۵. ۳ ، $A \cup B$ شمارای نامتناهی است. لذا $A \cup B \sim \mathbb{N}$. از $B \sim \mathbb{N}$ و $A \cup B \sim \mathbb{N}$ نتیجه می گیریم $A \cup B \sim B$. بنابراین، طبق قاعده ی (الف-۴) $card(A \cup B) = card\ B$ و برهان کامل می شود.

۷. فرض کنیم $\mathbb{N}^1 = \mathbb{N}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$. ثابت کنید

الف) برای هر $k \in \mathbb{N}$، $card \mathbb{N}^k = card\ \mathbb{N}$.

ب) $card\ \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k = card\ \mathbb{N}$

جواب: الف) نشان می دهیم $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{N}^k \sim \mathbb{N}$. با استقراء روی k پیش می رویم . داریم $\mathbb{N}^۱ = \mathbb{N}$، لذا حکم برای $k = ۱$ برقرار است. فرض کنیم $\mathbb{N}^{k-۱}$ شمارای نامتناهی باشد، نشان می دهیم $\mathbb{N}^k$ شمارای نامتناهی است. چون $\mathbb{N}^{k-۱} \sim \mathbb{N}$ و $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$، از قضیه ی ۷، بخش ۵. ۲ ، نتیجه می گیریم $\mathbb{N}^k = \mathbb{N}^{k-۱} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. از طرفی $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$، لذا $\mathbb{N}^k \sim \mathbb{N}$. بنابراین طبق قاعده ی (الف-۴) $\forall k \in \mathbb{N}\ card \mathbb{N}^k = card\ \mathbb{N}$.

ب) طبق قسمت (الف)، برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\mathbb{N}^k$ شمارای نامتناهی است. از طرفی $\forall k \neq k'\ \mathbb{N}^k \cap \mathbb{N}^{k'} = \emptyset$. لذا طبق نتیجه ی قضیه ی ۱۰، بخش ۵. ۳ ، $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ شمارای نامتناهی است، یعنی $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k \sim \mathbb{N}$. بنابراین $card\ \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k = card\ \mathbb{N}$.

تمرین ۶. ۲ – صفحه ی ۱۳۶.

۱. گیریم n یک عدد اصلی متناهی است. ثابت کنید که $n < card\ \mathbb{N}$.

جواب: فرض کنیم n یک عدد اصلی متناهی باشد. بنابراین یک مجموعه ی متناهی مانند A با n عضو وجود دارد، به طوری که $card\ A = n$. از طرفی $A \sim \mathbb{N}_n$. در نتیجه A با یک زیر مجموعه ی $\mathbb{N}$ همتوان است. بنابراین طبق تعریف داریم $card\ A \leq card\ \mathbb{N}$. اما چون A متناهی است، $A \nsim \mathbb{N}$. در نتیجه $n = card\ A < card\ \mathbb{N}$.

۲. گیریم a یک عدد اصلی ترامتناهی است. ثابت کنید که $card\ \mathbb{N} \leq a$. از این رو، $card\mathbb{N}$ کوچکترین عدد اصلی ترامتناهی است.

جواب: فرض کنیم a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد . بنابراین یک مجموعه ی نامتناهی مانند A وجود دارد به طوری که $card\ A = a$. طبق قضیه ی ۱۱، بخش ۵. ۳، مجموعه ی A شامل یک زیر مجموعه ی شمارای نامتناهی مانند B است و این طبق تعریف نتیجه می دهد $card\ \mathbb{N} = card\ B \leq card\ A = a$.

۳. دو مجموعه ی A و B مفروض اند. ثابت کنید که $card\ A \leq card\ B$ اگر و تنها اگر یک انژکسیون $f: A \to B$ وجود داشته باشد.

جواب: ابتدا فرض کنیم $card\ A \leq card\ B$. بنابراین A با زیر مجموعه ای مانند B' از B همتوان است. یعنی یک تابع دوسویی مانند $f: A \to B'$ وجود دارد. اگر تابع f را از A به B در نظر بگیریم انژکتیو است (ممکن است پوشا نباشد).

بر عکس، فرض کنیم $f: A \to B$ انژکتیو باشد. $f: A \to f(A)$ یک تابع دوسویی است. در نتیجه $A \sim f(A)$، لذا طبق تعریف $card\ A \leq card\ B$. (توجه کنید که $f(A)$ یک زیر مجموعه ی B است.)

۴. سه مجموعه ی A، B و C مفروض اند. ثابت کنید که

الف) اگر $card\ A \leq card\ B$ و $card\ B \leq card\ C$، آنگاه $card\ A \leq card\ C$.

ب) اگر $card\, A < card\, B$ و $card\, B < card\, C$، آنگاه $card\, A <$ $card\, C$.

جواب: الف)چون $card\, A \le card\, B$، انژکسیو ن $f: A \to B$ وجود دارد. فرض $card\, B \le card C$ نتیجه می دهد ، انژکسیون $g: B \to C$ وجود دارد. ترتیب دو انژکسیون f و g یعنی $gof: A \to C$، انژکسیون است. لذا $card\, A \le card\, C$.

ب) از آنجایی که $card\, A < card\, B$، انژکسیون $f: A \to B$ وجود دارد (زیرا $card\, A < card B$، طبق تعریف یعنی $card\, A \le card\, B$ و $card\, A \neq$ $card\, B$). همچنین فرض $card\, B < card\, C$ نتیجه می دهد ، انژکسیون $g: B \to C$ وجود دارد. ترکیب f و g یعنی $gof: A \to C$، یک انژکسیون است. لذا $card\, A \le$ $card\, C$. اگر $card\, A = card\, C$، آنگاه $card\, C = card\, A < card\, B$ ، که تناقض است. لذا $card\, A \neq card\, C$ و نتیجه می گیریم $card\, A < card\, C$.

۵. سه مجموعه ی A، B و C مفروض اند . ثابت کنید که

الف) اگر $card\, A \le card\, B$ و $card\, B < card\, C$، آنگاه $card\, A <$ $card C$.

ب) اگر $card\, A < card\, B$ و $card\, B \le card\, C$، آنگاه $card\, A <$ $card\, C$.

جواب: الف) مشابه استدلال مسئله ی قبل، انژکسیون های $f: A \to B$ و $g: B \to C$ وجود دارند. در نتیجه $gof: A \to C$ یک انژکسیون است و این یعنی $card\, A \le card C$ (*). اما $card\, A \neq card\, C$، زیرا اگر $card\, A = card\, C$، آنگاه $card\, B <$ $card\, C = card\, A$ و این تناقض با فرض $card\, A \le card\, B$ دارد. $card\, A \neq$ $card\, C$ و (*) نتیجه می دهند $card\, A < card\, C$.

ب) مشابه استدلال تمرین قبل، انژکسیون های $f: A \to B$ و $g: B \to C$ وجود دارند. در نتیجه

$gof: A \to C$ یک انژکسیون است و این یعنی $card\ A \leq card\ C (*)$. اما $cardA \neq$ $card\ C$ ، زیرا اگر $card\ A = card\ C$ باشد، آنگاه طبق فرض، $cardB \leq card\ A$ و این خلاف فرض است. $card\ A \neq card\ C$ و $(*)$، نتیجه می دهند $card\ A <$ $card\ C$.

۶. ثابت کنید که اگر A و B دو مجموعه باشند و $A \subseteq B$، آنگاه $card\ A \leq card\ B$.

جواب: فرض کنیم A و B به قسمی باشند که $A \subseteq B$. $f: A \to B$ با ضابطه ی $f(x) = x$ (نگاشت شمول)، یک انژکسیون است. در نتیجه $card\ A \leq card\ B$.

۷. ثابت کنید که اگر مجموعه های A، B و C طوری باشند که $A \subseteq B \subseteq C$ و $A \sim C$، آنگاه $A{\sim}B$.

جواب: از آنجایی که $A \subseteq B \subseteq C$، طبق تمرین قبل $card\ A \leq card\ B$ و $(*)$ $card\ B \leq card\ C$. از طرفی $A{\sim}C$، لذا $(**)$ $card\ A = card\ C$. از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می گیریم $card\ B \leq card\ A$. در نتیجه $card\ A = card\ B$ و این یعنی $A{\sim}B$.

۹. گیریم A یک مجموعه است و x عنصر A نیست. ثابت کنید که اگر $card\ A < card(A \cup \{x\})$، آنگاه A متناهی است.

جواب: فرض کنیم (فرض خلف) A نامتناهی باشد. طبق تمرین ۵، بخش ۶. ۱، $card\ (A \cup \{x\}) = card\ A$ و این تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

تمرین ۶. ۳ - صفحه ی ۱۳۷.

۱. نشان دهید که بزرگترین عدد اصلی وجود ندارد.

جواب: به برهان خلف، فرض کنیم a بزرگترین عدد اصلی باشد. بنابراین مجموعه ی A وجود دارد به طوری که $card\ A = a$. طبق قضیه ی کانتور $card\ A < card\ \mathcal{P}(A)$ و این تناقض است، زیرا فرض کرده بودیم $card\ A$ بزرگترین عدد اصلی است. لذا فرض خلف، باطل و بزرگترین عدد اصلی وجود ندارد.

۲. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید که اگر $A\sim B$ آنگاه $card\ \mathcal{P}(A) = card\ \mathcal{P}(B)$.

جواب: فرض کنیم $A\sim B$، لذا یک تابع دو سویی مانند $f: A \to B$ وجود دارد. $\psi: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ را با ضابطه ی $\psi\ (X) = f(X) = \{f(x) | x \in X\}$، که در آن $X \subseteq A$، تعریف می کنیم. ψ یک تابع دو سویی است. برای اثبات پوشایی ψ، فرض کنیم $Y \in \mathcal{P}(B)$. در نتیجه $Y \subseteq B$. قرار می دهیم $X = \{f^{-1}(y) | y \in Y\}$. بنابراین $X \subseteq A$ و داریم

$$\psi\ (X) = f(X) = \{f(f^{-1}(y))\ |\ y \in Y\} = \{y\ |\ y\ \in Y\} = Y$$

لذا ψ پوشاست.

برای اثبات یک به یکی ψ، فرض کنیم $\psi\ (X) = \psi\ (X')$. نشان می دهیم $X = X'$. فرض کنیم $x \in X$ دلخواه باشد. بنابراین $f(x) \in \psi\ (X)$. چون $\psi(X) = \psi\ (X')$، باید $f(x) \in \psi(X')$. بنابراین $\exists x' \in X'\ s.t\ f(x) = f(x')$. از آنجایی که f یک به یک است نتیجه می گیریم $x = x'$، در نتیجه $x \in X'$. نشان دادیم $X \subseteq X'$. با برهانی مشابه می توان نشان داد $X' \subseteq X$. بنابراین $X = X'$ و حکم اثبات می شود.

۴. ثابت کنید که مجموعه ی تمام زیر مجموعه های نامتناهی $\mathbb{N}$ ناشماراست. (راهنمایی: مسئله ی ۱۲، تمرین ۵. ۳ را به کار برید)

جواب: به برهان خلف فرض کنیم مجموعه ی تمام زیر مجموعه های نامتناهی $\mathbb{N}$ شمارا باشد. چون $\mathbb{N}$ شماراست، طبق مسئله ی ۱۲، بخش ۵. ۳، مجموعه ی تمام زیر مجموعه های متناهی $\mathbb{N}$ نیز شمارای نامتناهی است. از آنجایی که $\mathcal{P}(\mathbb{N})$، از زیر مجموعه های متناهی $\mathbb{N}$ به انضمام زیر مجموعه های نامتناهی $\mathbb{N}$ تشکیل شده است، طبق مسئله ی ۳، بخش ۵. ۳، $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ شماراست و این با تمرین ۳، همین بخش، تناقض دارد. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۵. با استفاده از قضیه ی کانتور (قضیه ی ۲) ثابت کنید که مجموعه ی تمام مجموعه ها وجود ندارد.

جواب: به برهان خلف، فرض کنیم U مجموعه ی تمام مجموعه ها باشد. بنابراین برای هر مجموعه ی A باید داشته باشیم $card\ A \leq card\ U$، زیرا $f: A \to U$ با ضابطه ی $f(x) = \{x\}$ یک تابع یک به یک است. در نتیجه باید داشته باشیم $card\ \mathcal{P}(U) \leq card\ U$ و این با قضیه ی کانتور تناقض دارد. لذا فرض خلف باطل و مجموعه ی تمام مجموعه ها وجود ندارد.

تمرین ۶. ۴- صفحه ی ۱۴۰.

۱. ثابت کنید که برای هر عدد اصلی x، $x + 0 = x$.

جواب: فرض کنیم X یک مجموعه باشد به طوری که $card\ X = x$. می دانیم $X \cup \emptyset\ = X$ و $X \cap \emptyset\ = \emptyset$. لذا

$$x = card\ X = card\ (X \cup \emptyset) = card\ X + card\ \emptyset = x + ۰$$

۳. گیریم x، y و z اعداد اصلی اند. ثابت کنید که $(x + y) + z = x + (y + z)$.

جواب: فرض کنیم x، y و z اعدادی اصلی باشند. بنابراین مجموعه های دو به دو مجزای X، Y

و Z وجود دارند به طوری که $card\ X = x$، $card\ Y = y$ و $card\ Z = z$. بنابر خاصیت شرکت پذیری برای مجموعه ها داریم $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$. لذا :

$$card\left((X \cup Y) \cup Z\right) = card\ (X \cup (Y \cup Z))$$

$$\Longrightarrow card\ (X \cup Y) + card\ Z = card\ X + card\ (Y \cup Z)$$

$$\Longrightarrow (card\ X + card\ Y) + card\ Z = card\ X + (card\ Y + card\ Z)$$

$$\Longrightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$$

۴. گیریم n، عدد اصلی متناهی ودلخواهی است. ثابت کنید

الف) $n + \aleph_0 = \aleph_0$

ب) $n + c = c$

جواب: الف) فرض کنیم n یک عدد اصلی متناهی باشد. بنابراین یک مجموعه ی متناهی مانند X (که می توان فرض کرد مجزا از $\mathbb{N}$ است) وجود دارد به طوری که $card\ X = n$. از طرفی طبق تمرین ۷ ، بخش ۵. ۲ ، $\mathbb{N} \cup X$ یک مجموعه ی شمارای نامتناهی است، یعنی $\mathbb{N} \cup X \sim \mathbb{N}$. لذا:

$$n + \aleph_\circ = card\ (X \cup \mathbb{N}) = card\ \mathbb{N} = \aleph_\circ$$

ب) فرض کنیم n یک عدد متناهی است. بنابراین $n = card\ N_n$. از طرفی $card\ (۰,۱) = card\ \mathbb{R} = c$. از آنجایی که $(۰,۱) \cap \mathbb{N}_n = \emptyset$ ، داریم:

$$card\ \left(\mathbb{N}_n \cup (۰,۱)\right) = card\ \mathbb{N}_n + card\ (۰,۱) = n + c(*)$$

از طرفی می دانیم $\mathbb{R} \sim (۰,۱) \subset (۰,۱) \cup \mathbb{N}_n$ و $(۰,۱) \cup \mathbb{N}_n \subset \mathbb{R}$. در نتیجه :

$card\ \left((۰,۱) \cup \mathbb{N}_n\right) = c\ (**)$. از روابط $(*)$و $(**)$ نتیجه می شود $n + c = c$.

۶. گیریم x، y و z اعدادی اصلی هستند.

الف) ثابت کنید که اگر $x \leq y$، آنگاه $x + z \leq y + z$.

ب) با یک مثال نشان دهید که اگر در قسمت (الف) به جای ($\leq$) نماد ($<$) گذاشته شود، حکم (الف) درست نیست.

جواب: الف) فرض کنیم اعداد اصلی x و y طوری باشند که $x \leq y$ و z یک عدد اصلی دلخواه باشد. بنابراین مجمو عه های X، Y و Z وجود دارند به طوری که $X \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$، $card\ X = x$، $card\ Y = y$ و $card\ Z = z$. چون $x \leq y$، تابع یک به یک $f: X \to Y$ وجود دارد. $g: X \cup Z \to Y \cup Z$، با ضابطه ی $g(t) = \begin{cases} f(t) & t \in X \\ t & t \in Z \end{cases}$، یک به یک است. لذا :

$$card\ (X \cup Z) \leq card\ (Y \cup Z) \Longrightarrow card\ X + card\ Z$$
$$\leq card\ Y + card\ Z \Longrightarrow x + z \leq y + z$$

ب) قرار می دهیم $x = card\ (\{a\}) = ۱$ و $z = card\ \mathbb{N}_O = \aleph_0$ و $y = card\ \mathbb{N}_e = \aleph_0$. ($\mathbb{N}_O$ اعدا طبیعی فرد و $\mathbb{N}_e$ اعداد طبیعی زوج است.) داریم:

$$x + z = card\ (\{a\} \cup \mathbb{N}_O) = \aleph_0 (*)$$
$$y + z = card\ (\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_O) = card\ (\mathbb{N}) = \aleph_0 (**)$$

از (*) و (**) نتیجه می گیریم $x + z = y + z$، در حالی که $x < y$.

۷. گیریم x، y و z اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که اگر $x = y$، آنگاه $x + z = y + z$.

جواب : فرض کنیم x، y و z سه عدد اصلی باشند به طوری که $x = y$. بنابراین مجموعه های X، Y و Z وجود دارند به طوری که $card\ X = x$، $card\ Y = y$، $card\ Z = z$ و $X \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$. از $card\ X = card\ Y$ نتیجه می گیریم $X \sim Y$. طبق قضیه ی

۶، بخش۵. ۲ ، $X \cup Z \sim Y \cup Z$. بنابراین $card\ (X \cup Z) = card\ (Y \cup Z)$. لذا $card\ X + card\ Z = card\ Y + card\ Z$ و این یعنی $x + z = y + z$.

۸. با یک مثال نقیض نشان دهید که عکس مسئله ی ۷ بالا درست نیست.

جواب : داریم : $n + c = c = ۰ + c$، اما $n \neq ۰$.

۹. ثابت کنید که برای هر مجموعه ی A و B،

$$\boldsymbol{card\ A + card\ B = card(A \cup B) + card\ (A \cap B)}$$

جواب: داریم $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)(*)$. بنابراین $A \cup B$ را به صورت اجتماع مجزایی از مجموعه ها نوشته ایم . داریم:

$$\begin{aligned}
&card(A \cup B) + card\ (A \cap B) \\
&= card\ \big((A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)\big) + card\ (A \cap B) \\
&= card\ (A - B) + \ card(A \cap B) + card\ (B - A) + \ card\ (A \cap B) \\
&= card\ \big((A - B) \cup \ (A \cap B)\big) + card\ ((B - A) \cup \ (A \cap B)) \\
&= card\ A + card\ B
\end{aligned}$$

۱۰. ثابت کنید که اگر a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد، آنگاه $a + 1 = a$. (راهنمایی: از قضیه ی شرودر-برنشتاین استفاده کنید)

جواب: این مسئله را به دو روش حل می کنیم. ابتدا با استفاده از قضیه ی شرودر-برنشتاین:

فرض کنیم a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد. بنابراین یک مجموعه ی نامتناهی مانند A وجود دارد به طوری که $card\ A\ = a$. طبق تعریف، زیر مجموعه ی سره ای از A مانند B وجود دارد به قسمی که $A \sim B$. فرض کنیم $x \notin A$. به راحتی می توان نتیجه گرفت $A \cup \{x\} \sim B \cup \{a\}$ که در آن $a \in A - B$. لذا $A \cup \{x\}$ با زیرمجموعه ای از A همتوان است.

از طرفی A با خودش که زیر مجموعه ای از $A \cup \{x\}$ است، همتوان است. در نتیجه، بنابر قضیه ی شرودر-برنشتاین $A \cup \{x\} \sim A$. واین نتیجه می دهد $card(A \cup \{x\}) = cardA$. لذا $a + ۱ = a$ و حکم ثابت می شود.

حال بدون استفاده ی مستقیم از قضیه ی شرودر-برنشتاین مسئله را حل می نماییم:

فرض کنیم a یک عدد اصلی تر امتناهی باشد. بنابراین یک مجموعه ی نامتناهی مانند A وجود دارد به طوری که $card\ A = a$. طبق تمرین ۵، بخش ۶. ۱ ، $card\ (A \cup \{x\}) = card\ A$، که در آن x عنصری از A نیست . در نتیجه

$$a + ۱ = card\ A + card\ \{x\} = card\ (A \cup \{x\}) = card\ A = a.$$

۱۱. ثابت کنید که اگر n یک عدد اصلی متناهی و a یک عدد اصلی ترامتناهی باشد، آنگاه $a + n = a$.

جواب: اثبات به استقراء روی n . بنا به تمرین قبل، حکم برای $n = ۱$ برقرار است.

فرض کنیم حکم برای $n = k$ برقرار باشد، یعنی $a + k = a$. برای $n = k + ۱$ داریم:

$$a + (k + ۱) \overset{\text{شرکت پذیری}}{=} (a + k) + ۱ \overset{\text{فرض استقراء}}{=} a + ۱ = a$$

در نتیجه حکم ثابت می شود.

تمرین ۶. ۵ - صفحه ی ۱۴۲.

۲. گیریم اعداد اصلی x، y و z به قسمی هستند که $x \leq y$. ثابت کنید که $xz \leq yz$.

جواب: از آنجایی که x، y و z اعداد اصلی اند، مجموعه های X، Y و Z وجود دارند به طوری که $card\ X = x$ ، $card\ Y = y$ و $card\ Z = z$. چون $x \leq y$، تابع یک به یک

$f: X \to Y$ وجود دارد. $g: X \times Z \to Y \times Z$ را با ضابطه ی $g(x,z) = (f(x), z)$ تعریف می کنیم. به آسانی نتیجه می شود که g یک تابع یک به یک است. لذا $card\ (X \times Z) \leq card\ \ (Y \times Z)$ و این یعنی $card\ X\ \times card\ Z \leq$ $card\ Y \times card\ Z$. در نتیجه $xz \leq yz$.

۴. گیریم n یک عدد اصلی متناهی است. ثابت کنید که اگر $n \neq 0$، آنگاه $n\aleph_0 = \aleph_0$.

جواب: اثبات به استقراء روی n. به وضوح، حکم برای $n = ۱$ برقرار است (زیرا $\{۱\} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$) فرض کنیم حکم برای $n = k$ برقرار باشد، یعنی داشته باشیم $k\aleph_\circ = \aleph_\circ$. حکم را برای $n = k + ۱$ ثابت می کنیم:

$$(k+۱)\aleph_\circ \overset{\text{پخش پذیری}}{=} k\aleph_\circ + ۱\aleph_\circ \overset{\text{فرض استقراء}}{=} \aleph_\circ + ۱\aleph_\circ \overset{\text{پایه استقراء}}{=}$$

$$\aleph_\circ + \aleph_\circ \overset{\text{مثال ۳}}{=} \aleph_\circ$$

۶. نشان دهید که تابع $f: (0,1) \times (0,1) \to (0,1)$ که در برهان مثال ۶ با $f(0/x_1\, x_2x_3 \ldots, 0/y_1y_2y_3 \ldots) = 0/x_1\, y_1x_2y_2x_3y_3 \ldots.$ تعریف شده است ، سوژکیتو نیست.

جواب: عدداعشاری $\circ/۹۱۹۱۹۱ \ldots \in (\circ,۱)$ رادر نظر می گیریم . بنا بر تعریف f داریم:

$$f(\circ/۹۹۹ \ldots, \circ/۱۱۱ \ldots) = f(\circ/\overline{۹}, \circ/\overline{۱}) = \circ/۹۱۹۱۹۱ \ldots$$

ولی عدد $(\circ/۹۹۹ \ldots, \circ/۱۱۱ \ldots) = (\circ/\overline{۹}, \circ/\overline{۱}) \notin (\circ,۱) \times (\circ,۱)$، زیرا $\circ/۹۹۹ \ldots = \circ/\overline{۹} = ۱$. لذا f پوشا نیست.

۷. ثابت کنید که اگر x یک عدد اصلی و n یک عدد اصلی متناهی باشد، آنگاه $nx = x + x + x + \cdots + x$ (n بار).

جواب: چون x یک عدد اصلی است، مجموعه ی X وجود دارد به طو ری که $cardX = x$.
همچنین فرض کنیم $A = \{a_۱, a_۲, \dots, a_n\}$. برای هر $۱ \leq i \leq n$ قرار می دهیم $A_i = \{a_i\} \times X$. از آنجایی که $A_i \sim X$، برای هر $۱ \leq i \leq n$، لذا $cardA_i = X$، برای هر $۱ \leq i \leq n$. حال داریم:

$$nx = card\ (A \times X)$$

$$= card\ (A_۱ \cup A_۲ \cup \dots . \cup A_n)$$

$$\overset{A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall\ i \neq j}{=\!=\!=\!=\!=} cardA_۱ + \ card\ A_۲ + \cdots + card\ A_n$$

$$= x + x + \cdots + x \left(n \text{ بار}\right)$$

به روش استقراء نیز می توان حکم فوق را ثابت کرد.

۸. گیریم x ، y و z اعداد اصلی هستند . ثابت کنید که اگر $x = y$، آنگاه $xz = yz$.

جواب : فرض کنیم x ، y و z سه عدد اصلی باشند . لذا مجموعه های X ، Y و Z وجود دارد به طوری که که $card\ X = x$ ، $card\ Y = y$ و $card\ Z = z$. از $x = y$ نتیجه می گیریم $X \sim Y$. چون $Z \sim Z$، طبق قضیه ی ۷ در فصل قبل، نتیجه می گیریم $X \times Z \sim Y \times Z$. در نتیجه $card\ (X \times Z) = card\ \ (Y \times Z)$. لذا $card\ X\ \times card\ Z = card\ Y \times card\ Z$ و این یعنی $xz = yz$.

تمرین ۶. ۶- صفحه ی ۱۴۵.

۱. ثابت کنید که در برهان قضیه ی ۶ ، تابع $\psi: B^A \ \to Y^X$ بیژکتیو است.

جواب: فرض کنیم $\psi(f) = \psi(f')$، که در آن f و f' توابعی از A به B هستند . نشان می دهیم $f = f'$. عنصر $a \in A$ را دلخواه می گیریم . از آنجایی که تابع g در قضیه ی مذکور،

دوسویی است، نتیجه می گیریم g^{-1} پوشا است. بنابراین $\exists x \in X \ \ s.t \ \ g^{-1}(x) = a$. تساوی $\psi(f) = \psi(f')$ به این معنی است که $ho\,fog^{-1} = hof'og^{-1}$. بخصوص داریم $hofog^{-1}(x) = hof'g^{-1}(x)$ و این یعنی $hof(a) = hof'(a)$. از آنجایی که h یک به یک است $f(a) = f'(a)$. چون a دلخواه بود نتیجه می گیریم $f = f'$.

۲. گیریم a یک عدد اصلی اختیاری است. ثابت کنید که $a^0 = 1$، $a^1 = a$، $1^a = 1$ و $0^a = 0$ اگر $a \neq 0$.

جواب: از مجموعه ی $\emptyset$ به هر مجموعه ی دلخواه ، فقط یک تابع وجود دارد که همان تابع $\emptyset$ است. زیرا $\emptyset \times A = \emptyset$ و تنها زیر مجموعه ی آن $\emptyset$ است که شرایط تابع را دارا می باشد. بنابراین :

$$A^{\emptyset} = \{\emptyset\} \Longrightarrow card(A^{\emptyset}) = ۱ \Longrightarrow a^{0} = ۱$$

فرض کنیم A یک مجموعه باشد به طوری که $card\ A = a$. هر عضو از مجموعه ی $\{x\} \times A$ یک تابع از مجموعه ی تک عضوی $\{x\}$ به مجموعه ی A است. بنابراین داریم:

$$a^{۱} = card\left(A^{\{x\}}\right) = card\left(\{x\} \times A\right) = card\left(\{x\}\right) card\ A = ۱a = a$$

از مجموعه ی A به مجموعه ی تک عضو ی $\{x\}$ یک تابع وجود دارد که همان $A \times \{x\}$ است، لذا :

$$۱^{a} = card\ \{x\}^{A} = ۱$$

از مجموعه ی غیر تهی A به مجموعه ی $\emptyset$ تابعی وجود ندارد، زیرا تنها زیر مجموعه ی $A \times \emptyset = \emptyset$، مجموعه ی $\emptyset$ است. اما $\emptyset$، شرط اول تابع را ندارد (زیرا $Dom\emptyset \neq A$ در حالی که هر تابعی مانند f از A به $\emptyset$ باید دارای شرط $Dom\emptyset = A$ باشد). در نتیجه :

$$۰^{n} = card\ \left(\emptyset^{A}\right) = ۰$$

۳. نشان دهید که برای هر عدد اصلی a، $a < 2^a$.

جواب: فرض کنیم a یک عدد اصلی باشد . بنابراین یک مجموعه مانند A وجود دارد به طوری که $cardA = a$. در مثال ۷ ثابت شد $۲^a = card\ \mathcal{P}(A)$. از طرفی طبق قضیه ی کانتور $card\ A < card\ \mathcal{P}(A)$، در نتیجه $a = card\ A < ۲^a$.

۶. ثابت کنید که برای هر عدد متناهی $n \geq 1$ ، $c^{\aleph_0} = c = c^n$.

جواب: از آنجایی که $c \leq c$ و $n \geq ۱$ ، بنابر تمرین ۴ نتیجه می گیریم $c^۱ \leq c^n (*)$. به طور مشابه می توان نشان داد $c^n \leq c^{\aleph_۰} (**)$. از $(*), (**)$ ، مثال ۵، قضیه ی ۸ و قضیه ی ۱۰ نتیجه می گیریم :

$$c = c^۱ \leq c^n \leq c^{\aleph_۰} = (۲^{\aleph_۰})^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰} = c$$

لذا $c^{\aleph_۰} = c = c^n$، برای هر $n \geq ۱$.

۷. گیریم C مجموعه ی تمام اعداد مختلط است. ثابت کنید که $card\ C = c$.

جواب: مجموعه ی اعداد مختلط به صورت $C = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^۲ = -۱\}$ تعریف می شود. لذا به آسانی می توان نشان داد که $C \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. در نتیجه داریم:

$$card\ C = card\ (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = card\ \mathbb{R} \times card\ \mathbb{R} = cc = c$$

۹. ثابت کنید که تابع از $\mathcal{P}(A)$ به $\{0,1\}^A$ که هر D در $\mathcal{P}(A)$ را به χ_D می برد، بیژکتیو است .

جواب: تابع مفروض را با ψ نشان می دهیم. ابتدا فرض کنیم $\psi(D) = \psi(D')$. طبق تعریف، نتیجه می شود $\chi_D = \chi_{D'}$. باید نشان دهیم $D = D'$. فرض کنیم $d \in D$ دلخواه باشد. بنابر تعریف χ داریم $\chi_D(d) = ۱$. از طرفی $\chi_D = \chi_{D'}$، در نتیجه $\chi_{D'}(d) = ۱$ و این طبق

تعریف نتیجه می دهد $d \in D'$. نشان دادیم $D \subseteq D'$. با برهان مشابه می توان نشان داد $D' \subseteq D$. لذا $D = D'$ و ψ یک به یک است.

برای اثبات پوشایی ψ، فرض کنیم $f \in \{0,1\}^A$ دلخواه باشد. قرار می دهیم $D = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$. به آسانی می توان بررسی نمود که $f = \chi_D$، از اینکه $\psi(D) = \chi_D = f$، نتیجه می شود که ψ پوشا است.

۱۱. ثابت کنید که در برهان قضیه ی ۸، تابع $\psi: Z^{Y\times X} \to (Z^Y)^X$ بیژکتیو است.

جواب: ابتدا نشان می دهیم ψ یک به یک است. فرض کنیم $\psi(f_1) = \psi(f_2)$. باید نشان دهیم $f_1 = f_2$. برای این منظور کافی است نشان دهیم $\forall (y,x) \in Y \times X \ \ f_1(y,x) = f_2(y,x)$. از $\psi(f_1) = \psi(f_2)$ نتیجه می گیریم $e_{f_1} = e_{f_2}$. بنابراین $\forall x \in X \ \ e_{f_1}(x) = e_{f_2}(x)$ و این طبق تعریف یعنی $\forall x \in X \quad f_1^x = f_2^x$. لذا می توان نتیجه گرفت $\forall x \in X \ \ (\forall y \in Y \ \ f_1^x(y) = f_2^x(y))$. طبق تعریف تابع f^x، گزاره ی قبل را می توان به صورت

$$\forall (y,x) \in Y \times X \ \ f_1(y,x) = f_2(y,x)$$

بیان کرد و این یعنی $f_1 = f_2$. بنابراین ψ یک به یک است.

برای اثبات پوشایی ψ، فرض کنیم $h \in [Z^Y]^X$ دلخواه باشد و لذا $h: X \to Z^Y$ تابعی به صورت $h(x) = h_x$ می باشد که در آن h_x تابعی از Y بتوی Z است. برای اثبات پوشایی ψ باید تابعی مانند $f: Y \times X \to Z$ بیابیم به طوری که $\psi(f) = h$. تابع f را به صورت $f(y,x) = h_x(y)$ تعریف می کنیم. بنابراین داریم:

$$\forall x \in X \ , \forall y \in Y \ \ f(y,x) = h_x(y) \Longrightarrow \forall x \in X \ \ (\forall y \in Y \ f^x(y) =$$

$$f(y,x) = h_x(y)) \Longrightarrow \ \forall x \in X \ \ f^x = h_x = h(x)$$

$$\Longrightarrow \ \forall x \in X \ e_f(x) = h(x) \Longrightarrow e_f = h \Longrightarrow \psi(f) = h$$

لذا ψ پوشا است.

۱۲. ثابت کنید که در برهان قضیه ی ۹ ، تابع $\psi: (A \times B)^X \to A^X \times B^X$ بیژکتیو است.

جواب : ابتدا نشان می دهیم ψ یک به یک است . فرض کنیم $\psi(f) = \psi(g)$، که در آن f و g توابعی از X بتوی $A \times B$ می باشند. لذا می توان فرض کرد $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ و $g(x) = \left(g_1(x), g_2(x)\right)$ برای هر $x \in X$. از $\psi(f) = \psi(g)$ نتیجه می گیریم

$$(p_A\, of\, , p_B\, of) = (p_A\, og\, , p_B\, og)(*).$$

حال داریم :

$$\forall x \in X \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (p_A\, of(x)\, , p_B\, of(x)) = (p_A\, og(x)\, , p_B\, og(x)) = (g_1(x)\, , g_2(x)) = g(x)$$

برای اثبات پوشایی ψ، فرض کنیم $(f, g) \in A^X \times B^X$ دلخواه باشد . لذا f ، تابعی از X بتوی A و g، تابعی از X بتوی B می باشد. $h: X \to A \times B$ را به صورت $h(x) = (f(x), g(x))$ تعریف می کنیم. داریم:

$$\psi(h) = (p_A\, oh\, , p_B\, oh\,) = (f, g)$$

در نتیجه ψ پوشا است.